PARTITIONEN & RELATIONEN

Ein Vortrag im Rahmen
des mathematischen Vorkurses der
Fachschaft MathPhys
von
Johannes Keller

Fragen, Anmerkungen und Korrekturen an:
Johannes.Keller@stud.uni-heidelberg.de

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dieser Vortrag entstand im Rahmen des mathematischen Vorkurses der Fachschaft MathPhys an der Universität Heidelberg. Die erste Version dieses Vortrags wurde im Wintersemester 2012/2013 gehalten und seit dem stetig weiter entwickelt. Als Grundlage für diese Version nutze ich das bisherige Vortragsskript „Relationen, Partitionen und Abbildungen" von Fabian Grüning und „Lineare Algebra" von Siegfried Bosch. [1]

[1] Grüning, F. (2013): *Relationen, Partitionen und Abbildungen.* Vortragsskript für den mathematischen Vorkurs der Fachschaft MathPhys an der Universität Heidelberg.
Bosch, S. (2010): *Lineare Algebra.* 5. Auflage. Springer Spektrum: Berlin, Heidelberg.

Kapitel 1

Grundlagen

Um uns mit Partitionen und Relationen beschäftigen zu können, benötigen wir einige grundlegende Begriffe und Definitionen. Diese sollen im folgenden Kapitel wiederholt werden.

Definition 1.1: *Sei X eine Menge. Dann nennen wir die Menge aller Teilmengen von X die Potenzmenge von X und bezeichnen diese mit:*

$$Pot(X) := \{Y \mid Y \subseteq X\}.$$

Beispiel 1.2: *Sei $X = \{1,2,3\}$, dann ist:*

$$Pot(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

Definition 1.3: *Seien X und Y Mengen, dann nennen wir die Menge aller (geordneten) Paare von Elementen von X und Y das kartesische Produkt und schreiben:*

$$X \times Y := \{\big(x, y\big) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Eine Element $(x, y) \in X \times Y$ nennen wir Zwei-Tupel oder kurz Tupel.

Beispiel 1.4: *Sei $X = \{a, b\}$ und $Y = \{1,2\}$, dann ist:*

$$X \times Y = \{(a,1), (a,2), (b,1), (b,2)\}$$

Achtung! Während es bei Mengen nicht auf die Reihenfolge ankommt, also $\{a, b\} = \{b, a\}$ gilt, kommt es bei Tupeln auf die Reihenfolge an, es gilt $(a, b) \neq (b, a)$.

Definition 1.5: *Seien $X_1, ...X_n$ Mengen. Dann ist*

$$X_1 \times ... \times X_n := \{(a_1, ..., a_n) \mid a_i \in X_i, 1 \leq i \leq n\}.$$

Ein Element $(a_1, ..., a_n) \in X_1 \times ... \times X_n$ nennen wir auch n-Tupel. Sei nun X eine beliebige Menge, dann bezeichnen wir mit

$$X^n := X \times ... \times X := \{(a_1, ..., a_n) \mid a_i \in X, 1 \leq i \leq n\}$$

das n-fache kartesische Produkt von X mit sich selbst.

Definition 1.6: *Sei I eine beliebige Indexmenge. Und $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie von Mengen. Dann bezeichnen wir mit*

$$\bigcup_{i\in I} X_i = \{x \mid \exists i \in I : x \in X_i\}$$

die Vereinigung der Mengen X_i. Und mit:

$$\bigcap_{i\in I} X_i = \{x \mid \forall i \in I : x \in X_i\}$$

den Schnitt der Mengen X_i.

Beispiel 1.7: *Sei $I = \{1,2,3\}$ und $X_1 = \{1,2,3\}, X_2 = \{a,b,c\}$ und $X_3 = \{1,2,a,b\}$. Dann ist:*

$$\bigcup_{i\in I} X_i = \{1,2,3,a,b,c\}$$

und

$$\bigcap_{i\in I} X_i = \emptyset.$$

Seien nun $Y_1 = \{1,2,a\}, Y_2 = \{a,b,c,2\}$, und $Y_3 = \{1,2,a,b\}$. Dann ist:

$$\bigcup_{i\in I} Y_i = \{1,2,3,a,b,c\}$$

und

$$\bigcap_{i\in I} Y_i = \{a,2\}.$$

Bemerkung 1.8: *Die Wohldefiniertheit von Definition 1.6 folgt aus der Assoziativität und Kommutativität von $\bigcup$ und $\bigcap$. Der Nachweis dieser Eigenschaft dient der geneigten Leserin[1] als Übungsaufgabe.*

[1] In diesem Text verwende ich, um den Lesefluss nicht zu behindern, das generische Femininum, es sollen sich aber bitte alle Personen jeglichen Geschlechts angesprochen fühlen.

Kapitel 2

Motivation

Die ersten Tage des Studiums können herrlich sein. Neue Leute, eine neue Stadt, viele aufregende Dinge und vor allem die erste eigene Wohnung. Und kaum hat man sich bei der Stadt angemeldet, bekommt man auch schon Post. Zuerst freut man sich noch über den ersten Brief im eigenen Briefkasten und dann stellt man fest: „*Mist da will ja jemand Geld von mir*“. Dieser jemand ist niemand geringeres als der ARD ZDF Deutschlandradio Beitragsservice, oder wie es früher hieß (und auch heute im Volksmund noch heißt): die GEZ. Viele Jahre verlangte die GEZ von jedem Menschen in Deutschland Gebühren, das hatte viele Nachteile und wurde deshalb 2012 durch die Haushaltspauschale ersetzt. Wir können über die Idee dahinter nur spekulieren, vermutlich aber hatten sie in etwa folgende Ziele:

- Jeder Mensch in Deutschland sollte erfasst werden, damit auch jede bezahlen kann.
- Aber niemand soll doppelt zahlen.
- Der Verwaltungsaufwand sollte möglichst klein sein

Die Umsetzung sah am Ende wie folgt aus: Jeder Haushalt in Deutschland muss nun Gebühren zahlen, unabhängig davon wie viele Menschen ihn ihm wohnen. Zieht man neu in eine Wohnung ein und meldet seinen Erstwohnsitz dort an, erhält man Post von der GEZ. Ist die Wohnung schon angemeldet, müsst ihr diese Wohnung nicht neu anmelden und auch nicht nochmal dafür bezahlen, sondern die Kosten für die GEZ mit euren Mitbewohnerinnen teilen.

Schauen wir mal ob die GEZ mit diesem Modell ihre eigenen Ansprüche erfüllt hat. Dazu sei

$$D := \{d \mid d \text{ ist Mensch in Deutschland}\}.$$

Wir wollen alle Menschen aus Deutschland sinnvoll in kleinere „Objekte“ zusammenpacken. Dabei wollen wir Beziehungen zwischen Menschen ausnutzen. Jeder Mensch wohnt in einer Wohnung und steht so mit all seinen Mitbewohnerinnen in Beziehung. Deshalb packen wir mal alle Menschen, die zusammen in einem Haushalt wohnen, zu einem neuen Objekt zusammen und erhalten so die Menge:

$$H := \{h \mid h \text{ ist ein Haushalt in Deutschland}\} \subset Pot(D).$$

Schauen wir mal, ob uns das was bringt:

- Jeder Mensch hat eine Wohnung[1] und kann deshalb zur Kasse gebeten werden.
  Mathematisch ausgedrückt: $\forall d \in D\ \exists h \in H : d \in h$ und $\bigcup_{h \in H} h = D$.
- Jeder Mensch hat nur einen Hauptwohnsitz, muss also nur einmal zahlen.
  Mathematisch ausgedrückt: $\forall h_1, h_2 \in H : h_1 \cap h_2 = \emptyset$ oder $h_1 = h_2$.
- Irgendwie ist „H kleiner als D“ oder zumindest übersichtlicher.

Mathematisch ausgedrückt, ist H eine Partition von D, womit wir bei unserem Thema wären:

Definition 2.1: *Sei X eine Menge, I eine geeignete Indexmenge und $P := \{P_i \mid i \in I\} \subseteq Pot(X)$ eine Menge von nicht leeren Teilmengen von X. Wir nennen P genau dann eine Parition von X, falls*

$$X = \bigcup_{i \in I} P_i$$

und für alle $P_i, P_j \in P$ mit $i, j \in I$ genau einer der folgenden Aussagen wahr ist:

i) $P_i = P_j$

ii) $P_i \cap P_j = \emptyset$

Ein weiteres Beispiel für eine Partition einer Menge ist folgendes:

Beispiel 2.2: *Sei $X = \mathbb{Z}$ und $P_1 = \{z \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} : 2k = z\} = \{\ldots -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$ und $P_2 = \{z \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} : 2k+1 = z\} = \{\ldots -5, -3, 1, 3, 5, \ldots\}$. Dann gilt $P_1 \cup P_2 = \mathbb{Z}$ und $P_1 \cap P_2 = \emptyset$, sowie $P_i = P_j$ für $i = j$.*

Die GEZ hat eine Partition einer Menge genutzt um mit möglichst wenig Aufwand, möglichst viel Geld zu verdienen. Es scheint also manchmal geschickt zu sein größere Mengen in ihre Teilmengen zu zerlegen und diese Teilmengen dann als Menge zu betrachten. Die Frage ist nur, wie können für beliebige Mengen effizient Partitionen gebildet werden?

Die GEZ nutzte dazu Beziehungen zwischen Elementen aus D. Und weil der Begriff „Beziehung“ für viele „romantische Beziehung“ bedeutet, nutzen wir statt Beziehung einfach ein lateinisches Wort dafür [2] , nämlich: Relationen. Und zwar sagte die GEZ: zwei Menschen aus Deutschland stehen genau dann in Relation, wenn sie zusammen wohnen. Schauen wir uns nun einmal die Eigenschaften dieser Relation an. Dazu betrachten wir mal die WG von Sven, Markus und Kathi. Wir stellen fest:

- Sven wohnt zusammen mit Sven. Klingt doof, ist aber so.
- Sven wohnt zusammen mit Kathi. Also wohnt auch Kathi zusammen mit Sven.
- Sven wohnt zusammen mit Kathi, Kathi wohnt zusammen mit Markus, also wohnt auch Sven zusammen mit Markus.

Wir wollen dieses Konzept der Beziehungen nun für beliebige Mengen verallgemeinern und uns unserem eigentlichen Thema nähern: den Äquivalenzrelationen.

[1] Aus Gründen der Lesbarkeit wurde in dieser Stelle darauf verzichtet Obdachlose einzubeziehen, auch wenn uns klar ist, dass auch Obdachlose Menschen in Deutschland sind.

[2] Das klingt dann auch gleich viel intelligenter.

Kapitel 3

Äquivalenzrelationen

Definition 3.1: *Sei X eine Menge und $R \subseteq X \times X$. Dann nennen wir R eine Relation auf X. Ist $(x, y) \in R$, so schreiben wir auch: $x \sim_R y$ und sagen: „x steht in Relation zu y“.*

Besteht keine Verwechslungsgefahr, schreiben wir statt $\sim_R$ auch kurz $\sim$.

In einer Relation R fassen wir Elemente, die in einer bestimmten Beziehung stehen, zu einem Tupel zusammen. Für Relationen R gilt für $x, y \in X$ immer $(x, y) \in R$ oder $(x, y) \notin R$. Wir müssen also eindeutig bestimmten können, ob zwei Elemente in Beziehung sind oder nicht. Betrachten wir nun die Eigenschaften solcher Relationen.

Definition 3.2: *Sei X eine Menge und R eine Relation auf X. Dann nennen wir R eine Äquivalenzrelation auf X, falls für alle $x, y, z \in X$ folgendes gilt:*

i) $(x, x) \in R$, *also* $x \sim_R x$ *(Reflexivität)*

ii) *Aus* $(x, y) \in R$ *folgt* $(y, x) \in R$, *also* $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ *(Symmetrie)*

ii) *Aus* $(x, y), (y, z) \in R$ *folgt* $(x, z) \in R$, *also* $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$ *(Transitivität)*

Wir haben in Kapitel 2 *Motivation* bereits eingesehen, dass es sich bei „zusammenwohnen“ um eine Äquivalenzrelation auf der Menge D handelt. Schauen wir uns ein weiteres Beispiel für eine Äquivalenzrelation an.

Beispiel 3.3: *Sei nun S die Menge der Studierenden in diesem Hörsaal. Für $x, y \in S$ sagen wir $x \sim y$ genau dann, wenn x und y in der selben Reihe sitzen. Man kann leicht zeigen, dass durch diese Relation eine Äquivalenzrelation auf S gegeben ist.*

3.1 Äquivalenzklassen

Im folgenden Abschnitt wollen wir uns nun näher mit Äquivalenzrelationen beschäftigen. Aus Faulheit nehmen wir ab jetzt an, dass X eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X ist.

Definition 3.4: *Für $x \in X$ nennen wir*

$$[x] := \{y \in X \mid y \sim x\} \subset X$$

die Äquivalenzklasse von x. Sie besteht aus allen Elementen, die mit x in Beziehung stehen.

Beispiel 3.5: *Betrachten wir die Äquivalenzklassen der in Beispiel 3.3 eingeführten Äquivalenzrelation. Was sind die Äquivalenzklassen?*[1]

Satz 3.6: *Sei $x \in X$, dann gilt für alle $y \in [x]$ schon $[x] = [y]$.*

Beweis: *Sei $y \in [x]$ beliebig. Es gilt also $y \sim x$ und da $\sim$ Äquivalenzrelation ist, gilt $x \sim y$. Wir wollen die Gleichheit der Mengen $[x]$ und $[y]$ zeigen.*

„$\subseteq$ ": Sei $z \in [x]$ beliebig. Dann gilt $z \sim x$. Und da $x \sim y$ folgt aus der Transitivität von $\sim$ $z \sim y$, also: $z \in [y]$. Es folgt $[x] \subseteq [y]$. #

„$\supseteq$ ": Sei $z \in [y]$ beliebig. Dann gilt $z \sim y$. Und da $y \sim x$ folgt aus der Transitivität von $\sim$ $z \sim y$, also $z \in [x]$. Es folgt $[y] \subseteq [x]$. #

Da $[x] \subseteq [y]$ und $[y] \subseteq [x]$ folgt $[x] = [y]$. □

Wir nennen die in Satz 3.6 bewiesene Eigenschaft von Äquivalenzklassen auch die Vertreterunabhängigkeit. Dies ermöglicht es uns für Äquivalenzklassen immer möglichst „einfache" Vertreter zu wählen. Betrachten wir nun die Äquivalenzklassen von Elementen die nicht in Relation stehen.

Satz 3.7: *Seien $x, y \in X$ derart, dass x und y nicht in Relation stehen (es gilt also $(x, y) \notin R$). Dann gilt schon $[x] \cap [y] = \emptyset$.*

Beweis: *Solche Aussagen lassen sich ideal mit einem Widerspruchsbeweis zeigen. Seien $x, y \in X$ derart, dass x und y nicht in Relation stehen.*

Wir nehmen an, dass $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ gilt. Dann muss es aber ein $z \in X$ mit $z \in [x] \cap [y]$ geben. Woraus direkt $z \sim x$ und $z \sim y$ folgt. Da $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist, folgt auf Grund der Symmetrie von $\sim$ schon $y \sim z$. Aus der Transitivität von $\sim$ folgt dann $y \sim x$, was ein Widerspruch zur Annahme ist.

Unsere Annahme muss also schon falsch gewesen sein. Für $x, y \in X$ mit $(x, y) \notin R$ gilt $[x] \cap [y] = \emptyset$, was zu zeigen war. □

Wir wollen nun die Aussagen aus den letzten beiden Sätzen zusammenfassen:

Korollar 3.8: *Seien $x, y \in X$, dann gilt genau eine der beiden Aussagen:*

i) $[x] = [y]$

ii) $[x] \cap [y] = \emptyset$

Aus diesem Korollar folgt nun die Wohldefiniertheit folgender Definition:

Definition 3.9: *Mit*

$$X/_{\sim} := \{[x] \mid x \in X\}$$

bezeichnen wir die Menge der Äquivalenzklassen (auch Faktor- oder Quotientenmenge) von X bezüglich $\sim$.

[1] Ja, genau richtig. Die Studierenden die gemeinsam in einer Reihe sitzen, bilden jeweils eine Äquivalenzklasse.

Beispiel 3.10: *Betrachten wir wieder die Äquivalenzrelation aus Beispiel 3.3. Nach Korollar 3.8 können wir die die Äquivalenzklassen von S bezüglich ~ durch die Nummern der Reihen bezeichnen. Wir setzten also für* $i \in \mathbb{N}$

$$[i] = \{x \in S \mid x \text{ sitzt in der } i\text{-ten Reihe}\}.$$

Dann ist

$$X/_\sim = \{[1],[2],\dots,[n]\}$$

Wobei n die Anzahl der Sitzreihen in diesem Hörsaal ist.

3.2 Der Zusammenhang zwischen Partitionen und Äquivalenzrelationen

In Korollar 3.8 haben wir eine Eigenschaft von Äquivalenzklassen kennen gelernt, die auch die Elemente einer Partition erfüllen müssen. Dies führt zu folgendem Satz:

Satz 3.11: *Die Menge* $X/_\sim$ *bildet eine Partition von* X.

Beweis: *Wir müssen folgende zwei Eigenschaften zeigen:*

i) $X = \bigcup\limits_{x\in X} [x]$

ii) Für alle $[x],[y] \in X/_\sim$ *gilt entweder* $[x] = [y]$ *oder* $[x] \cap [y] = \emptyset$.

Aussage ii) folgt direkt aus Korollar 3.8, hier ist nichts mehr zu zeigen. Bleibt also i) zu zeigen.

„⊆ ": Sei $x \in X$ *beliebig. Da ~ eine Äquivalenzrelation ist, ist sie reflexiv und es gilt* $x \sim x$ *also* $x \in [x]$. *Jedes* $x \in X$ *ist also in seiner eigenen Äquivalenzklasse enthalten. Daraus folgt* $X \subseteq \bigcup\limits_{x\in X} [x]$. #

„⊇ ": Offensichtlich gilt für alle $x \in X$ *schon* $[x] \subseteq X$, *also* $\bigcup\limits_{x\in X} [x] \subseteq X$. #

Insgesamt folgt $X = \bigcup\limits_{x\in X} [x]$. □

Wir können sogar zeigen, dass jede Partition von X eine Äquivalenzrelation auf X definiert.

Satz 3.12: *Sei* $P := \{P_i \mid i \in I\} \subseteq Pot(X)$ *eine Partition von* X. *Dann existiert eine Äquivalenzrelation ~ auf* X, *so dass* $X/_\sim = P$ *gilt.*

Beweis: *Wir wollen in diesem Beweis eine Äquivalenzrelation ~ angeben, die diese Eigenschaft erfüllt. Wir sagen für* $x, y \in X$, *dass* $x \sim y$ *genau dann gilt, wenn es ein* $i \in I$ *mit* $x, y \in P_i \in P$ *gibt. Dies zu zeigen, bleibt Übungsaufgabe.* #

Da P *eine Partition von* X *ist gilt* $X = \bigcup\limits_{in\in I} P_i$. *Wir wollen nun zeigen, dass es für jede Äquivalenzklasse* $[x]$ *ein* $i \in I$ *gibt mit* $[x] = P_i$:

Sei $x \in X$ beliebig, da P eine Partition von X ist, gibt es ein $i \in I$ mit $x \in P_i$, da sonst $X \neq \bigcup_{in \in I} P_i$ gelten würde. Für alle $y \in [x]$ gilt per Definition $x, y \in P_i$, also gilt $[x] \subseteq P_i$.

Für alle $y \in P_i$ gilt $x \sim y$ und damit auch $y \in [x]$, also gilt auch $P_i \subset [x]$. Für jedes Element $[x] \in X\big/_\sim$ gibt es also ein $i \in I$ mit $[x] = P_i$. Daher folgt $X\big/_\sim \subseteq P$. #

Wir müssen noch zeigen, dass es für alle $P_i \in P$ ein $x \in X$ mit $[x] = P_i$ gibt. Sei $P_i \in P$ beliebig, da $P_i \neq \emptyset$ und $P_i \subseteq X$ gibt es ein $x \in X$ mit $x \in P_i$. Analog könnten wir $P_i = [x]$ zeigen und daraus $P \subseteq X\big/_\sim$ folgern. #

Insgesamt folgt die Behauptung $\square$

Kapitel 4

Ordnungsrelationen

Mithilfe von Äquivalenzrelationen lassen sich die Elemente einer Menge anhand geeigneter Eigenschaften in Klassen aufteilen. Wir können also mit Äquivalenzrelationen Mengen sortieren. Im folgenden Kapitel wollen wir betrachten, wie wir über Relationen Mengen anordnen können. Allerdings müssen wir um Mengen sinnvoll ordnen zu können andere Eigenschaften an unsere Relation fordern. Betrachten wir dafür ein einfaches Beispiel.

Beispiel 4.1: *Betrachten wir die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$. Dann ordnen wir die Zahlen in $\mathbb{Z}$ schon ganz intuitiv der Größe nach. Ganz intuitiv können wir also mit $\leq$ Zahlen aus $\mathbb{Z}$ ordnen und so in Beziehung setzten. Und da wir unserer Intuition manchmal trauen können, gehen wir mal davon aus, dass diese Relation sinnvoll ist. Welche Eigenschaften hat denn nun die Relation $\leq$?*

Schauen wir uns die an die wir schon von Äquivalenzrelationen kennen: Reflexivität, Symmetrie und Transitivität. Seien nun $a, b, c \in \mathbb{Z}$ beliebig.

- *Dann gilt für auf jeden Fall $a \leq a$. Also ist $\leq$ auf $\mathbb{Z}$ reflexiv.*
- *Zudem können wir leicht prüfen, dass falls $a \leq b$ und $b \leq c$ gilt auch schon $a \leq c$ gilt. Also ist $\leq$ auf $\mathbb{Z}$ auch transitiv.*
- *Allerdings gilt, falls $a \leq b$ gilt, nur in einem bestimmten Fall auch $b \leq a$, nämlich dann, wenn $a = b$ gilt. Wir nennen diese Eigenschaft Antisymmetrie.*

Wir wollen dies nun ordentlich definieren.

Definition 4.2: *Sei X eine Menge und $R \subseteq X \times X$. Wir bezeichnen R als Ordnungsrelation auf X, falls für alle $a, b, c \in X$ gilt:*

i) $(a, a) \in R$ *(Reflexivität),*

ii) *Gilt* $(a, b), (b, c) \in R$ *so gilt auch* $(a, c) \in R$ *(Transitivität),*

ii) *Gilt* $(a, b) \in R$ *und* $(b, a) \in R$ *so gilt schon* $a = b$ *(Antisymmetrie).*

Ist R eine nicht weiter spezifizierte Ordnungsrelation auf X, so schreiben wir für $(a, b) \in R$ auch $a \preceq b$ und nennen das Tupel $(X, \preceq)$ eine geordnete Menge.

Wir wollen ein weiteres Beispiel für eine Ordnungsrelation kennenlernen.

Beispiel 4.3: *Sei $X = Pot(\mathbb{N})$. Wir sagen für $N, M \in X$, dass genau dann $N \preceq M$ gilt, falls $N \subseteq M$. Wir sehen schnell ein, dass $(X, \preceq)$ eine geordnete Menge ist. Der Beweis dafür bleibt Übungsaufgabe.*

Nehmen wir die Bezeichnungen aus Beispiel 4.3 und setzten $N = \{1,2,3\}$ und $M = \{2,3,4\}$. Dann gilt weder $N \subseteq M$ noch $M \subseteq N$. Also gilt auch weder $N \preceq M$ noch $M \preceq N$. So wie wir bei Äquivalenzrelationen nicht fordern, dass alle Elemente miteinander in Relation stehen, fordern wir dies auch für Ordnungsrelationen nicht. Wir können jedoch spezielle Ordnungsrelationen betrachten:

Definition 4.4: *Sei $(X, \preceq)$ eine geordnete Menge. Wir bezeichnen $\preceq$ genau dann als Totalordnung auf X, wenn für alle $n, m \in X$ entweder $n \preceq m$ oder $m \preceq n$ gilt. Ist $\preceq$ eine Totalordnung auf X, so bezeichnen wir das Tupel $(X, \preceq)$ als total geordnete Menge.*

Wir sehen schnell ein, dass $(\mathbb{Z}, \leq)$ eine total geordnete Menge ist.

Kapitel 5

Ausblick

Wir können Relationen nicht nur auf einer Menge, sondern auch zwischen verschiedenen Mengen definieren.

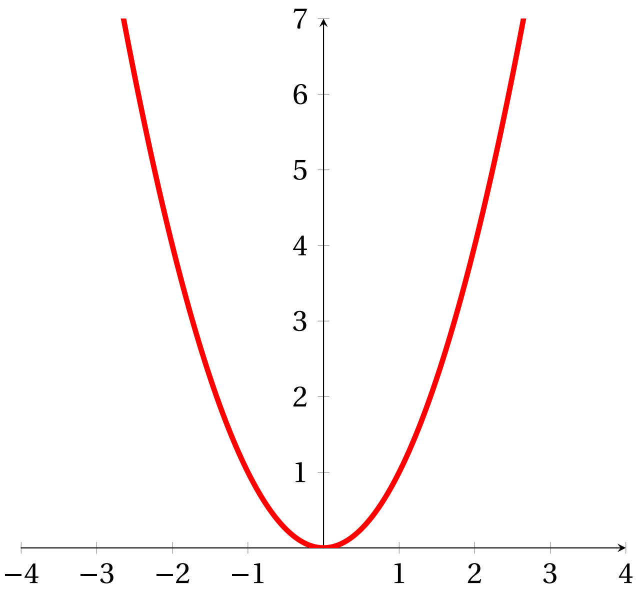
Definition 5.1: *Seien X und Y zwei nichtleere Mengen. Dann bezeichnen wir eine Menge $R \subseteq X \times Y$ als Relation zwischen X und Y.*

Allerdings macht es bei Relationen zwischen unterschiedlichen Mengen keinen Sinn mehr diese Relationen auf Eigenschaften wie Symmetrie, Transitivität, Reflexivität oder Antisymmetrie zu untersuchen. Das solche Relationen trotzdem wichtig sind, soll ein Beispiel für eine solche Relation motivieren.

Beispiel 5.2: *Seien $X = \mathbb{R}$ und $Y = \mathbb{R}_{\geq 0} = \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\}$. Wir definieren die Relation R wie folgt:*

$$R = \{(a, b) \in X \times Y \mid a^2 = b\}$$

Wir können diese Relation sogar graphisch darstellen. Dazu setzten wir die Menge X als x-Achse an und die Menge Y als y-Achse und markieren alle Punkte aus R rot. Dies ergibt folgendes Schaubild.



Und na, an was erinnert euch dieses Schaubild? Richtig, das ist der Graph der Funktion $f(x) = x^2$. Und wie solche Funktionen, oder Abbildungen wie sie auch genannt werden, über Relationen definiert werden, werdet ihr morgen erfahren.

Kapitel 6

Aufgaben

Anmerkungen zu den Aufgaben:

Die Aufgaben sind so gestaltet, dass ihr sie, wenn auch mit Anlaufschwierigkeiten, alleine oder in Partnerinnenarbeit schaffen solltet. Eure Vorkurstutorin hilft euch aber bei Fragen gerne weiter.

Aufgabe 1: *Sei* $X = \{a, b, c\}$.

a) *Welche der folgenden Relationen sind Äquivalenzrelationen auf* X*?*

   i) $R_1 = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,c), (b,b), (c,c)\}$

   ii) $R_2 = \{(a,a), (a,b), (b,a), (a,c), (c,a), (b,c), (c,b)\}$

   ii) $R_3 = \{(a,b) \in X \times X \mid a \neq b\}$

b) *Gebe eine Äquivalenzrelation auf* X *und die Äquivalenzklasse von* $[a]$ *an (bezüglich deiner Relation). Lass deine Nachbarin prüfen, ob es sich bei deiner Relation wirklich um eine Äquivalenzrelation handelt.*

Aufgabe 2: *Sei* X *eine beliebige, nicht leere Menge. Und* $X^n = X \times \ldots \times X$ *das* n*-fache kartesische Produkt von* X*. Wir definieren auf* X^n *eine Relation via:* $(a_1, \ldots, a_n) \sim (b_1, \ldots, b_n) :\Leftrightarrow \{a_1, \ldots, a_n\} = \{b_1, \ldots b_n\}$.

a) *Bestimme für* $X = \{1, 2, 3\}$ *und* $n = 3$ *die Äquivalenzklassen von* $[(1,2,3)]$ *und* $[(2,2,1)]$.

   Hinweis: Du darfst annehmen, dass $\sim$ *eine ÄR ist, da du dies in Aufgabenteil b) zeigst.*

b) *Zeige, dass durch* $\sim$ *eine Äquivalenzrelation auf* X^n *definiert ist.*

Aufgabe 3: *Sei* $P := \{P_i \mid i \in I\} \subseteq Pot(X)$ *eine Partition von* X*. Wir sagen für* $x, y \in X$*, dass* $x \sim y$ *genau dann gilt, wenn es ein* $i \in I$ *gibt mit* $x, y \in P_i \in P$*. Zeige, dass es sich bei dieser Relation um eine Äquivalenzrelation handelt.*

Aufgabe 4: *Sei* $X = \{a, b, c, d\}$

a) *Welche der folgenden Mengen sind Partitionen von* X*?*

   i) $P_1 = \{a, b, c, d\}$

ii) $P_2 = \{\{a, b\}, \{c\}\}$

iii) $P_3 = \{\{a, b\}, \{c, d\}\}$

b) *Gib zwei weitere Partitionen von X an und lassen deine Nachbarin oder deinen Nachbarn prüfen ob du recht hast.*

Aufgabe 5: *Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ beliebig. Wir definieren auf $\mathbb{Z}$ eine Relation via:*

$$a \sim b :\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z} : 2 \cdot n = a - b)$$

Zeige, dass es sich bei $\sim$ um eine Äquivalenzrelation handelt und gebe alle Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$ an durch möglichst einfache Vertreter an.

Aufgabe 6: *Sei $X = Pot(\mathbb{N})$. Wir sagen für $N, M \in X$, dass genau dann $N \preceq M$ gilt, falls $N \subseteq M$ gilt. Zeige, dass $(X, \preceq)$ eine geordnete Menge ist.*