Aufgaben: Partitionen und Relationen

Anmerkungen zu den Aufgaben: Die Aufgaben sind so gestaltet, dass ihr sie, wenn auch mit Anlaufschwierigkeiten, alleine oder in Partnerinnenarbeit schaffen solltet. Eure Vorkurstutorin hilft euch aber bei Fragen gerne weiter.

Aufgabe 1: Sei $X = \{a, b, c\}$.

a) Welche der folgenden Relationen sind Äquivalenzrelationen auf X?

   i) $R_1 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, c), (b, b), (c, c)\}$
   ii) $R_2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b)\}$
   ii) $R_3 = \{(a, b) \in X \times X \mid a \neq b\}$

b) Gebe eine Äquivalenzrelation auf X und die Äquivalenzklasse von $[a]$ an (bezüglich deiner Relation). Lass deine Nachbarin prüfen, ob es sich bei deiner Relation wirklich um eine Äquivalenzrelation handelt.

Aufgabe 2: Sei X eine beliebige, nicht leere Menge. Und $X^n = X \times ... \times X$ das n-fache kartesische Produkt von X. Wir definieren auf X^n eine Relation via: $(a_1, ..., a_n) \sim (b_1, ..., b_n) :\Leftrightarrow \{a_1, ..., a_n\} = \{b_1, ...b_n\}$.

a) Bestimme für $X = \{1, 2, 3\}$ und $n = 3$ die Äquivalenzklassen von $[(1, 2, 3)]$ und $[(2, 2, 1)]$.

   Hinweis: Du darfst annehmen, dass $\sim$ eine ÄR ist, da du dies in Aufgabenteil b) zeigst.

b) Zeige, dass durch $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X^n definiert ist.

Aufgabe 3: Sei $P := \{P_i \mid i \in I\} \subseteq Pot(X)$ eine Partition von X. Wir sagen für $x, y \in X$, dass $x \sim y$ genau dann gilt, wenn es ein $i \in I$ gibt mit $x, y \in P_i \in P$. Zeige, dass es sich bei dieser Relation um eine Äquivalenzrelation handelt.

Aufgabe 4: Sei $X = \{a, b, c, d\}$

a) Welche der folgenden Mengen sind Partitionen von X?

   i) $P_1 = \{a, b, c, d\}$
   ii) $P_2 = \{\{a, b\}, \{c\}\}$
   iii) $P_3 = \{\{a, b\}, \{c, d\}\}$

b) Gib zwei weitere Partitionen von X an und lassen deine Nachbarin oder deinen Nachbarn prüfen ob du recht hast.

Aufgabe 5: Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ beliebig. Wir definieren auf $\mathbb{Z}$ eine Relation via:

$$a \sim b :\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z} : 2 \cdot n = a - b)$$

Zeige, dass es sich bei $\sim$ um eine Äquivalenzrelation handelt und gebe alle Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$ an durch möglichst einfache Vertreter an.

Aufgabe 6: Sei $X = Pot(\mathbb{N})$. Wir sagen für $N, M \in X$, dass genau dann $N \preceq M$ gilt, falls $N \subseteq M$ gilt. Zeige, dass $(X, \preceq)$ eine geordnete Menge ist.