Fachschaft MathPhys Heidelberg

Mengenlehre und vollständige Induktion

Vladislav Olkhovskiy

Vorkurs 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Motivation

In den ersten beiden Vorträgen des Vorkurses wurde mit dem Bereich der Logik eine unentbehrliche Grundlage der Mathematik beleuchtet. Es wurde gezeigt, wie man Aussagen mittels bekannter 'Wahrheiten' beweisen oder widerlegen kann.

Die Frage, die sich nun stellt, ist, von welchen 'Wahrheiten' aus man die Suche nach Aussagen über die Mathematik beginnt. Eine solche grundlegende Wahrheit nennt man auch 'Axiom'. Mittels einer geeigneten Wahl an Axiomen sowie präzisen Definitionen erhält man ein solides Fundament für jene Suche. Heutzutage verwendet man als dieses üblicherweise Mengen.

In diesem Vortrag wird zuerst definiert, was man unter einer Menge versteht. Dann werden die Eigenschaften von Mengen untersucht. Anschließend wird mit den natürlichen Zahlen ein Beispiel einer unendlichen Menge betrachtet sowie die Methode der vollständigen Induktion erklärt.

2 Mengen

2.1 Grundbegriffe

Definition 2.1 *Eine* Menge *ist eine Zusammenfassung M von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten m zu einem Ganzen.*

Bemerkung 2.2 *Die obige Definition geht auf Georg Cantor (1845-1918) zurück, man spricht auch von 'naiver' Mengenlehre.*

Um mit den Mengen arbeiten zu können, wird folgende Notation eingeführt:

Notation 2.3 *Eine Menge M kann als Aufzählung der Elemente wie z.B*

$$M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

oder mittels einer charakterisierenden Eigenschaft $E(x)$ der Elemente x:

$$M = \{x \in X \,|E(x)\}$$

notiert werden (hierbei bezeichne X auch eine Menge), z.B $M = \{x \in \mathbb{N} \,|\, 3 < x < 10\}$
Nach Cantor wird die mehrfache Aufzählung in der Menge ignoriert:

$$\{a, a, a, ..., a\} = \{a\}$$

Diese Aussage versteckt sich im Begriff 'wohlunterschiedene Objekte'.

Definition 2.4 *Sei M eine Menge und m ein Objekt.*

- *m Element von M: $m \in M$*
- *m kein Element von M: $m \notin M$*
- Leere Menge *(die Menge, die keine Elemente enthält): $\emptyset$, $\{\}$*

Definition 2.5 *Eine Menge N heißt* Teilmenge *einer Menge M,* $N \subseteq M$*, falls gilt:* $\forall x \in N : x \in M$*. In Worten: Jedes Element der Menge N ist auch in M enthalten.*

Zum Beispiel gilt: $\{1,2,3\} \subset \{1,2,3,4\}$ oder $\{1\} \subset \{1,2,3,4\}$.

Proposition 2.6 *Seien L, N, M Mengen. Dann gilt:* $L \subseteq N \wedge N \subseteq M \Rightarrow L \subseteq M$*.*

Beweis: Sei $x \in L$ ein beliebiges Element. Da $L \subseteq N$ ist, gilt nach Definition $x \in N$. Aus $N \subseteq M$ folgt, dass $x \in M$. Da x beliebig gewählt war, gilt $\forall x \in L : x \in M$. □

Definition 2.7 *Sei M eine Menge. Mit* $P(M) := \{N \,|\, N \subseteq M\}$ *wird die Menge aller Teilmengen von M bezeichnet. Die Menge* $P(M)$ *nennt man* Potenzmenge.

Die Potenzmenge von $M_1 = \{0,1\}$ ist $P(M_1) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$

Bemerkung 2.8 *Es gilt:* $N \subseteq M \iff N \in P(M)$*.*

Lemma 2.9 *Sei M eine Menge. Dann ist* $\emptyset \subset M$*. In Worten: Die leere Menge ist eine Teilmenge jeder Menge.*

Beweis: Sei $x \in M$. Dann gilt, dass die Aussage $x \in \emptyset \Rightarrow x \in M$ wahr ist, *denn:*
Es gibt keine Elemente x in der leeren Menge, d.h die Aussage $x \in \emptyset$ ist falsch (bezeichne diese Aussage mit A). $x \in M$ ist eine richtige Aussage für Elemente x aus M (bezeichne diese Aussage mit B). Damit ist die Aussage $A \Rightarrow B$ wahr (Definition der Implikation vgl. Logikvortrag). □

Bemerkung 2.10 *Sei M eine Menge. Im Allgemeinen ist es falsch, dass die Aussage* $\emptyset \in M$ *wahr ist. Betrachte beispielsweise die Menge* $M = \{1\}$*. Dann gilt* $\emptyset \notin M$*.*

Lemma 2.11 *Sei M eine Menge. Dann ist* $\emptyset \in P(M)$ *und* $M \in P(M)$*.*

Beweis: Es ist zu zeigen, dass $\emptyset \subseteq M$ bzw. $M \subseteq M$. Ersteres gilt wegen des vorherigen Lemmas. Letzteres folgt, da $\forall x \in M : x \in M$ ist. □

Mit dem Begriff der Teilmenge ist auch die formale Definition von Gleichheit von Mengen möglich:

Definition 2.12 *Seien N, M Mengen. N ist gleich M, in Zeichen* $N = M$ *genau dann, wenn gilt:* $N \subseteq M \wedge M \subseteq N$*.*

2.2 Kostruktionen mit Mengen

An dieser Stelle wird vorgestellt, wie man aus gegebenen Mengen A, B neue Mengen konstruieren kann. Dazu werden die Begriffe wie Durchschnitt, Vereinigung, kartesisches Produkt und Komplement von Mengen vorgestellt.

Definition 2.13 *Sei M eine Menge, $A, B \subseteq M$ Teilmengen. Dann definiert man den* Durchschnitt *der Mengen A und B als*

$$A \cap B = \{x \in M \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

die Vereinigung *der Mengen A und B als*

$$A \cup B = \{x \in M \mid x \in A \vee x \in B\}$$

das kartesische Produkt *von A und B als*

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

das Komplement *der Menge A in M als*

$$M \setminus A = \{x \in M \mid x \notin A\}$$

sowie die symmetrische Differenz *von A und B als*

$$A \Delta B := \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$$

Um diese Begriffe besser zu verinnerlichen, folgt hier ein größeres Beispiel:

Beispiel 2.14 *Seien $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A, B \subset M$ mit $A = \{2, 3, 5\}$ und $B = \{5, 7\}$. Dann gilt:*
Der Durchschnitt von A und B ist $A \cap B = \{5\}$
Die Vereinigung ist $A \cup B = \{2, 3, 5, 7\}$.
Das kartesische Produkt ist $A \times B = \{(2, 5), (2, 7), (3, 5), (3, 7), (5, 5), (5, 7)\}$
Das Komplement von A in M ist $M \setminus A = \{1, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}$.
Die symmetrische Differenz von A und B ist $A \Delta B = \{2, 3, 7\}$

Ein interessierter Leser wird sicherlich fragen: Und wie beweist man Aussagen mit Mengen bzw. wie schreibt man es formal auf?
Dazu wird ein kleines Lemma gezeigt:

Lemma 2.15 *Seien A, B, C Mengen und $A, C \subset B$.*
Dann gilt: $B \setminus (A \cup C) = (B \setminus A) \cap (B \setminus C)$.

Beweis: $\subset$: Sei $x \in B \setminus (A \cup C)$. Dann gilt: $x \in B$ und $x \notin (A \cup C)$, d.h $x \in B$ und $x \notin (A \vee C)$. Mittels Wahrheitstabellen hat man gezeigt, dass $x \notin (A \vee C)$ genau der Aussage ($x \notin A$ und $x \notin C$) entspricht. Fügt man die logische Aussage zusammen, dann gilt: $x \in B$ und ($x \notin A$ und $x \notin C$), also ($x \in B$ und $x \notin A$) und ($x \in B$ und $x \notin C$), was $x \in B \setminus A$ und $B \setminus C$ entspricht, also: $x \in (B \setminus A) \cap (B \setminus C)$ gilt.
$\supset$: ist eine Übung. $\square$.

Weitere ähnliche Aussagen findet man in den Übungen.

2.3 Kardinalität von Mengen

Eine mögliches Kriterium, Mengen zu unterscheiden, ist zu schauen, ob sie gleich viele Elemente haben oder nicht. Genau das ist mit dem Begriff 'Kardinalität' gemeint.

Definition 2.16 *Die Kardinalität $\#M$ einer endlichen Menge M bezeichne die Anzahl ihrer Elemente. Es wird $\#M = \infty$ gesetzt, falls M unendlich viele Elemente hat.*

Beispielsweise: $\#\{a, p, e, q\} = 4$.

Lemma 2.17 *Sei M eine endliche Menge. Dann ist $\#P(M) > \#M$.*

Beweis: Sei $n = \#M$. Schreibe $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Dann gilt $\forall i = 1, \ldots, n$, dass $\{x_i\} \in P(M)$. Außerdem ist nach Lemma 2.11 $\emptyset \in P(M)$, d.h $\#P(M) \geq n + 1 > n = \#M$

2.4 Die natürlichen Zahlen

In diesem Abschnitt werden die natürlichen Zahlen formal über ein Axiomensystem (die sogenannten Peano-Axiome) definiert. Die natürlichen Zahlen sind ein Beispiel für eine Menge mit unendlich vielen Elementen.

Definition 2.18 *Eine Menge wird die Menge* der natürlichen Zahlen *genannt und mit $\mathbb{N}$ bezeichnet, wenn sie die folgenden Axiome erfüllt: (dabei wird mit n' der Nachfolger von n bezeichnet).*

1. $1 \in \mathbb{N}$,
2. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n' \in \mathbb{N}$,
3. $\nexists n \in \mathbb{N} : n' = 1$,
4. $n, m \in \mathbb{N}, n' = m' \Rightarrow n = m$

5. *Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ eine Teilmenge, sodass $1 \in M$ und $\forall n \in \mathbb{N} : (n \in M \Rightarrow n' \in M)$. Dann ist $M = \mathbb{N}$.*

Bemerkung 2.19 *Mit der 'klassischen' Vorstellung der natürlichen Zahlen als*

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

setzt man für ein $n \in \mathbb{N} : n' := n + 1$.

Um das Axiomensystem mathematisch zu untersuchen, sind folgende Fragen zu klären:

1. Existiert ein Objekt mit den geforderten Eigenschaften?
2. Inwiefern ist dieses Objekt durch die Axiome eindeutig bestimmt?

Im Rahmen dieses Vortrags wird nur die Konstruktion zur ersten Frage angedeutet, da die meisten Leser noch nicht genügend Wissen haben, um die mathematische Begründung von beiden Fragen nachzuvollziehen.

Definition 2.20 $1, 2, 3, \dots$ *sind erstmal nur Symbole, daher definiere:*

- $1 := P(\emptyset) = \{\emptyset\}$,
  $2 := P\big(P(\emptyset)\big) = \big\{\emptyset, \{\emptyset\}\big\}$,
  $3 := P\Big(P\big(P(\emptyset)\big)\Big) = P\Big(\big\{\emptyset, \{\emptyset\}\big\}\Big) = \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \big\{\{\emptyset\}\big\}, \big\{\emptyset, \{\emptyset\}\big\}\Big\}$ *usw.*
- *Damit* $\mathbb{N} := \Big\{P(\emptyset), P\big(P(\emptyset)\big), P\Big(P\big(P(\emptyset)\big)\Big), \dots\Big\}$.

Proposition 2.21 *Es ist $\#\mathbb{N} = \infty$.*

Beweis durch Widerspruch: Angenommen $\#\mathbb{N} = m < \infty$. Dann kann man ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so wählen, dass n_0 in $\mathbb{N}$ maximal ist. Dann ist nach Def. 2.18 (2) auch $P(n_0) \in \mathbb{N}$ (als Nachfolger von n_0 per Konstruktion in Definition 2.20), aber nach Lemma 2.17 ist $\#P(n_0) > \#n_0$, was ein Widerspruch dazu ist, dass $\#n_0$ maximal in $\mathbb{N}$ ist. Also gibt es kein solches Element und $\#\mathbb{N} = \infty$. □

3 Vollständige Induktion

Aus den Peano-Axiomen läßt sich ein Beweisprinzip ableiten, das *vollständige Induktion* genannt wird.

Satz 3.1 *Sei $\mathfrak{S}$ eine Eigenschaft, sodass für $n \in \mathbb{N}$ entweder $\mathfrak{S}(n) = w$ oder $\mathfrak{S}(n) = f$ gilt. Gilt dann $\mathfrak{S}(1) = w$ und $\forall n \in \mathbb{N} : (\mathfrak{S}(n) = w \Rightarrow \mathfrak{S}(n') = w)$, so ist $\mathfrak{S}(n) = w \, \forall n \in \mathbb{N}$.*

Beweis: Setze $M := \{n \in \mathbb{N} \,|\, \mathfrak{S}(n) = w\} \subseteq \mathbb{N}$. Dann erfüllt M die Voraussetzungen von (P5) und demnach ist $M = \mathbb{N}$. □

Um also zu zeigen, dass eine Aussage für alle natürlichen Zahlen gilt, genügt es, die Aussage für die $1 \in \mathbb{N}$ zu zeigen (genannt Induktionsanfang) und zu beweisen, dass die Aussagen mit beliebigem $n \in \mathbb{N}$ auch für dessen Nachfolger n' gelten (genannt Induktionsschritt).
An dieser Stelle folgen zwei einfache Beispiele. Dafür benötigen wir folgende Definition:

Definition 3.2

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Korollar 3.3

$$\forall n \in \mathbb{N} : \qquad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Beweis: (Mit vollständiger Induktion)
Induktionsanfang (n=1): $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$. (wahr)
Induktionsvoraussetzung: Es gelte die Induktionsvoraussetzung für ein $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Induktionsbehauptung: Es wird behauptet, dass für $n + 1$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

gilt, wobei $n \in \mathbb{N}$ wie in der Induktionsvoraussetzung gewählt ist.
Induktionsschluss:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{2(n+1) + n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$\square$

Korollar 3.4

$$\forall n \in \mathbb{N} : \qquad 2^n > n$$

.

Beweis: (Mit vollständiger Induktion)
Induktionsanfang (n=1): $2^1 = 2 > 1$. (wahr)
Induktionsvoraussetzung: Es gelte die Induktionsvoraussetzung für ein $n \in \mathbb{N} : \; 2^n > n$
Induktionsbehauptung: Es wird behauptet, dass für $n+1$: $2^{n+1} > (n+1)$ gilt, wobei $n \in \mathbb{N}$ wie in der Induktionsvoraussetzung gewählt ist.
Induktionsschluss:

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2 \cdot n = n + n > n + 1$$

$\square$

4 Danksagung

Ein besonderes Danke Schön geht an Stefan Zentarra. Auf Grundlage seines Skriptes ist aktuelles Skript entstanden. Ich danke ebenfalls die Erstis von den letzten Vorkursen, die die Fachschaft auf die unvollständige Erklärung des Konzeptes der leeren Menge hingewiesen haben.