Logik und Beweismethoden I

Anita Ullrich*

WS2017/18

Inhaltsverzeichnis

*basierend auf früheren Vorträgen von: Stefan Richter, Bärbel Janssen, Winnifried Wollner, Casper Goch, Axel Wagner, Saskia Klaus

Dieser Vortrag hat das Ziel, die elementaren Begriffe der Klassischen Logik einzuführen und die wesentlichen Regeln im Arbeiten mit mathematischen Aussagen darzulegen. Aufgrund der beschränkten Zeit und des Ziels einer maximalen Verständlichkeit können wir keine formal exakte Herleitung geben. Dies ist auch deswegen nicht möglich, weil andere, dafür benötigte Begriffe erst in späteren Vorträgen dieses Vorkurses erklärt werden.

Motivation

In der Mathematik wollen wir unsere Gedanken für andere möglichst verständlich formulieren und auch die Gedanken anderer möglichst einfach verstehen. Die Klassische Aussagenlogik dient hierbei gewissermaßen als Kommunikationsmittel, um Gedanken oder Sprache fehlerfrei zu formalisieren. Da in der Sprache häufig Fehler oder Missverständlichkeiten auftreten, setzen wir in der Mathematik feste Regeln, um dies zu verhindern.

Außerdem wollen wir die Struktur mathematischer Literatur oder Vorlesungen verstehen, die weitestgehend standardisiert. Diese Struktur hält sich meist an folgendes Muster:

Axiom
$\Downarrow$
Definition
$\Downarrow$
Satz
$\Downarrow$
Beweis

Axiom 0.1. Zu jedem Prädikat P gibt es eine Menge aller Objekte, die dieses Prädikat erfüllen.

Definition 0.2.

$$\mathbb{Z} := \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

Satz 0.3.

$$\forall n \in \mathbb{Z} : n \text{ gerade } \Rightarrow n^2 \text{ gerade.}$$

Beweis. Aus der Voraussetzung wissen wir, dass $n = 2m$, also können wir umformen:

$$\begin{aligned} n^2 &= (2m)^2 \\ &= 4m^2 \\ &= 2(2m^2) \\ &\overset{2m^2=k}{=} 2k \end{aligned}$$

$\square$

Nicht nur in der Mathematik findet das Gebiet der Klassischen Logik Gebrauch, sondern auch in der Informatik. In der Technischen Informatik beispielsweise benötigt man diese Logik für Schaltkreise, beim Programmieren entspricht die Bedingung einer if-Abfrage manchmal einer Operator-Verknüpfung zweier Aussagen (und/oder/Negation).

1 Klassische Aussagenlogik

In der Mathematik wollen wir Sätze formulieren, die immer wahr sein sollen. Aus solchen Sätzen wollen wir auch neue Sätze herleiten. Damit bei diesen Herleitungen keine Fehler passieren, gibt uns die Klassische Logik ein Konzept, mit dem wir die Formulierung und die Beweise von Sätzen auf ein sicheres Fundament stellen können. Das wichtigste Element der Klassischen Logik ist die Aussage.

1.1 Aussagen und Wahrheitswerte

Definition 1.1 (Aussage)**.** Eine **(logische) Aussage** ist ein sprachliches Gebilde, von dem es sinnvoll ist zu fragen, ob es wahr oder falsch ist.
Notation: Wir bezeichnen Aussagen mit Großbuchstaben ($A, B, C, ...$)

Die Klassische Logik ist durch genau zwei Eigenschaften gekennzeichnet. Die erste besagt:

Axiom 1.2 (Prinzip der Zweiwertigkeit)**.** Jede Aussage hat einen von genau zwei Wahrheitswerten, **wahr** oder **falsch**.
Notation: Wir bezeichnen die beiden Wahrheitswerte kurz mit **w** für wahr und **f** für falsch.

Beispiel 1.3. Aussagen sind:

- A = "Der Döner wurde in Deutschland erfunden."
- B = "Nutella hat einen Lichtschutzfaktor von 9,6."
- C = "Elefanten können hüpfen."
- D = "Jede natürliche Zahl lässt sich als Summe von vier Quadratzahlen schreiben."
- E = "Jede gerade Zahl größer als 2 ist die Summe zweier Primzahlen. (Goldbachsche Vermutung)"

Der Wahrheitswert von Aussage A ist nicht bekannt, aber entweder stimmt die Aussage oder nicht. Aussagen B,C und D sind durch Überprüfung bestimmbar.
Keine Aussagen sind:

- F = "Hoffentlich gewinne ich im Lotto."
- G = "Willst du Kaffee oder Tee trinken?"
- H = "Cauchy ist der beste Mathematiker."

Bei E ist es nicht sinnvoll, nach wahr oder falsch zu fragen. F ist eine Frage und Fragen besitzen keinen Wahrheitswert. G ist eine subjektive Aussage, um diese allgemein zu einer Aussage machen, müsste man erst definieren, wann jemand "der beste Mathematiker" ist.

1.2 Operatoren

Aus bestehenden Aussagen können mit Hilfe von so genannten Operatoren neue Aussagen gewonnen werden. Ein Operator nimmt eine bestimmte Anzahl von Aussagen (sog. "Operanden") entgegen und ordnet diesen - abhängig von ihrem Wahrheitswert - einen neuen Wahrheitswert (w oder f) zu. Ein Operator macht also aus einer oder mehreren Aussagen eine neue Aussagen.

Definition 1.4 (Operator)**.** Ein Operator $\bigstar$ ordnet einer bestimmten Anzahl von Aussagen $A_1, ..., A_n$ eine neue Aussage $\bigstar(A_1, ..., A_n)$ zu.

Das folgende zweite Axiom der Klassischen Logik sorgt dafür, dass die Definition eines Operator sinnvoll ("wohldefiniert") ist:

Axiom 1.5 (Prinzip der Extensionalität)**.** Der Wahrheitswert jeder durch Operatoren gebildeten Aussage ist eindeutig durch die Wahrheitswerte ihrer Teilaussagen bestimmt.

Nun ist uns klar, wie wir einen Operator zu definieren haben. Für jede mögliche Kombination von Wahrheitswerten müssen wir angeben, welchen Wahrheitswert die neue Aussage $\bigstar(A_1, ..., A_n)$ hat. Die Operatoren definieren wir mit dem Werkzeug der Wahrheitstafeln. Das sind Tabellen, in denen jede Spalte eine Aussage repräsentiert und jede Zeile eine mögliche Kombination von Wahrheitswerten. Bei Wahrheitstafeln schreibt man in die linken Spalten alle möglichen Wahrheitswerte der auftretenden Ausgangsaussagen (z.B. A und B); in den Spalten rechts davon schreibt man die Wahrheitswerte der aus den Ausgangsaussagen kombinierten Aussagen.

Wir führen nun nach und nach die bekanntesten Operatoren ein und jeder davon ist durch eine anschauliche Interpretation motiviert.

Definition 1.6 (Operation: Negation)**.** Für eine Aussage A definieren wir die **Negation** $\neg(A) = \neg A$ durch:

A	¬A
w	f
f	w

Interpretation: $\neg A$ nimmt immer genau den umgekehrten Wahrheitswert von A an.

Beispiel 1.7. $\neg A$: "Der Döner wurde nicht in Deutschland erfunden."
$\neg F$ ist nicht sinnvoll: "Willst du weder Kaffee noch Tee trinken?"

An einer Wahrheitstafel kann man auch erkennen, was weitere mögliche Operatoren wären:

Bemerkung 1.8. Alle möglichen Operatoren für eine Aussage A lauten:

A				
w	w	f	f	w
f	w	f	w	f

Man sieht, dass nicht die Notwendigkeit besteht, einen weiteren Operator zu definieren, der nur auf eine Aussage wirkt. Die erste Spalte entspricht w, die zweite Spalte entspricht f, die dritte Spalte entspricht $\neg A$ und die vierte Spalte entspricht der Identität, also A selbst.

Definition 1.9 (Operator: Und-Verknüpfung)**.** Für zwei Aussagen A, B definieren wir die **und-Verknüpfung** $\wedge(A, B) = A \wedge B$ durch:

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Interpretation: $A \wedge B$ ist genau dann wahr, wenn A und B wahr sind.

Beispiel 1.10. $A \wedge C$: "Der Döner wurde in Deutschland erfunden und Elefanten können hüpfen."
Nicht sinnvoll ist: $E \wedge F$: "Hoffentlich gewinne ich im Lotto und willst du Kaffee oder Tee trinken?"

Definition 1.11 (Operator: Oder-Verknüpfung)**.** Für zwei Aussagen A, B definieren wir die **oder-Verknüpfung** $\vee(A, B) = A \vee B$ durch:

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Interpration: $A \vee B$ ist genau dann wahr, wenn A wahr ist oder B wahr ist oder sowohol A als auch B wahr sind.

Im alltäglichen Sprachgebrauch ist das "oder" nicht eindeutig festgelegt, es kann sowohl exklusiv als auch inklusiv sein. In der Mathematik benennt man das exklusive "oder" explizit, also ist im Allgemeinen das inklusive gemeint, wenn es nicht weiter spezifiziert wird.

Beispiel 1.12. $D \vee C$: "Jede natürliche Zahl lässt sich als Summe von vier Quadratzahlen schreiben oder Elefanten können hüpfen."

Definition 1.13 (Operator: Implikation)**.** Für zwei Aussagen A, B definieren wir die **Implikation** $\Rightarrow (A, B) = A \Rightarrow B$ durch:

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Interpretation: Wenn A wahr ist, dann auch B. Man sagt auch: A ist hinreichend für B.

Beispiel 1.14. $B \Rightarrow C$: "Wenn Nutella einen Lichtschutzfaktor von 9,6 hat, dann können Elefanten hüpfen."
Nicht sinnvoll ist: $E \Rightarrow F$: "Wenn ich hoffentlich im Lotto gewinne, willst du dann Kaffee oder Tee trinken?"

Die Wahrheitswerte der Implikation in den beiden unteren Zeilen der Wahrheitstabelle sind in der Mathematik nicht unumstritten. Argumente für diese Setzung sind:

- Die Implikation wird vor allem genutzt, wenn man bereits weiß, dass A wahr ist. In dem Sinne hat man eine gewisse Definitionsfreiheit für den Wahrheitswert von A) B, wenn A falsch ist.

- Durch die obige Definition entsteht eine "einfache Logik", d.h. wir können bestimmte Sachverhalte, die wir als immer erfüllt ansehen, auch einfach ausdrücken. Beispielsweise ist mit obiger Setzung für alle $x \in \mathbb{N}$ die Aussage
$$x > 3 \Rightarrow x > 1$$
immer wahr.

Für ein besseres Verständnis ziehen wir den "modus ponens" vor, den wir in einem späteren Kapitel beweisen.

Satz 1.15 (modus ponens)**.** Für alle Aussagen A, B gilt:

$$(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$$

Interpretation: Wenn A gilt und B aus A folgt, dann gilt auch B.

Zwei beliebte falsche Schlüsse der Struktur $A \Rightarrow B$ sind:

- Aus der Gültigkeit der Folgerung B wird geschlossen, dass die Voraussetzungen A erfüllt sein müssen.
Bsp.: $-2 = 2 \overset{()^2}{\Rightarrow} 4 = 4$
Hierbei würde gefolgert, dass $-2 = 2$ gelten sollte, da ja $4 = 4$ wahr ist. Das ist aber falsch und entspräche der Aussage $(B \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow A$, von der man (bspw. als Übung) beweisen kann, dass diese falsch ist.

- Daraus, dass A nicht gilt, wird gefolgert, dass die Folgerung B auch nicht wahr ist. Auch hier sehen wir am obigen Beispiel, dass die Voraussetzung $-2 = 2$ falsch ist, aber dennoch die Folgerung $4 = 4$ wahr ist. Formal entspräche dieser Irrglaube $(\neg A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (\neg B)$, von dem man auch beweisen kann, dass dieser falsch ist.

Definition 1.16 (Operator: Äquivalenz)**.** Für zwei Aussagen A, B definieren wir die **Äquivalenz** $\Leftrightarrow (A, B) = A \Leftrightarrow B$ durch:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Interpretation: $A \Leftrightarrow B$ ist wahr, wenn A und B die gleichen Wahrheitswerte haben.

Beispiel 1.17. $C \Leftrightarrow A$: "Elefanten können genau dann hüpfen, wenn der Döner in Deutschland erfunden wurde."
Nicht sinnvoll ist: $E \Leftrightarrow G$: "Ich gewinne genau dann hoffentlich im Lotto, wenn Cauchy der beste Mathematiker ist."

Im nächsten Kapitel werden wir sehen, dass das Äquivalenzzeichen insbesondere beim Vereinfachen oder Vergleichen von Aussagen eine wesentliche Rolle spielt.

2 Sätze und Beweise

Definition 2.1 (Satz/Beweis)**.** Ein **Satz** ist eine Aussage, die überprüfbar immer wahr ist. Ein **Beweis** eines Satzes ist eine logische Herleitung dieser Wahrheits-Aussage aus Axiomen und Sätzen.

Andere Bezeichnungen für einen Satz sind auch (je nach Kontext): Lemma, Korollar, Proposition, etc.
Anstatt "Die Aussage ist immer wahr" verwenden wir auch "Die Aussage gilt." Als Beispiel wollen wir nun den "Satz vom Widerspruch" beweisen. Dies machen wir mit Hilfe von Wahrheitstafeln, d.h. wir gehen alle logischen Möglichkeiten durch und zeigen in jedem Fall, dass die Aussage des Satzes wahr ist.

Satz 2.2 (Satz vom Widerspruch)**.** Für eine beliebige Aussage A gilt:

$$\Leftrightarrow (\wedge(A, \neg(A)), f) = (A \wedge \neg A) \Leftrightarrow f$$

Alternative Formulierung: Es gilt $\neg(A \wedge \neg A)$.

Beweis. Wir leiten spaltenweise die Wahrheitswerte der in der Kopfzeile der Tafel stehenden Aussagen her:

A	$\neg A$	$A \wedge \neg A$	$(A \wedge \neg A) \Leftrightarrow f$
w	f	f	w
f	w	f	w

□

Aussgen mit Äquivalenzzeichen ("$\Leftrightarrow$"), die immer wahr sind, können dazu genutzt werden, andere Aussagen umzuformen, was einer vereinfachten Kommunikation dient. Kommt beispielsweise in einer anderen Aussage $A \wedge \neg A$ vor, so können wir stattdessen einfach f schreiben.
Zum Beispiel gilt für Aussagen A, B:

$$B \vee (A \wedge \neg A) \Leftrightarrow B \vee f$$

Nun können wir auch den "modus ponens" beweisen:

Beweis (zu "modus ponens")**.**

A	B	$A \Rightarrow B$	$A \wedge (A \Rightarrow B)$	$(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$
w	w	w	w	w
w	f	f	f	w
f	w	w	f	w
f	f	w	f	w

□

Auf ähnliche Weise kann der "Satz vom ausgeschlossenen Dritten" bewiesen werden, dies bleibt den Studierenden allerdings als Übungsaufgabe überlassen.

Satz 2.3 (Satz vom ausgeschlossenen Dritten)**.** Für eine beliebige Aussage A gilt:

$$A \vee \neg A$$

Alternative Formulierung: Es gilt $(A \vee \neg A) \Leftrightarrow w$.

3 Prädikatenlogik erster Stufe

3.1 Quantoren

Im Gegensatz zur Aussagenlogik, welche die Zerlegung von Aussagen in nicht weiter teilbare Aussagen (sog. Elementaraussagen) untersucht, beschäftigt sich die Prädikatenlogik mit der Struktur dieser Elementaraussagen.
Das Problem in der oben formulierten Aussagenlogik liegt darin, dass wir nur Sätze über Aussagen formulieren können, die uns vollständig bekannt sind.

Beispiel 3.1. Wir betrachten die Aussagen $A =$ "Steffen darf Alkohol kaufen" und $B =$ "Steffen ist älter als 10 Jahre".

Nehmen wir an, dass wir zeigen konnten, dass wenn A wahr ist, auch B wahr ist. Dann haben wir aber nur eine Aussage über die spezifische Person Steffen. Vielleicht können wir zeigen, dass die Implikation für die Person Claudia auch gilt. Aber das müssten wir dann für jede einzelne Person erneut überprüfen. Unser Ziel ist also, diese Implikation möglichst abstrakt zu formulieren. Vielleicht könnten wir die Implikation für alle Personen in Deutschland zeigen und sie auf diese Menschenmenge verallgemeinern. Also stellt sich die Frage, was die größte Menge an Menschen ist, auf die sich diese Aussage erweitern ließe. Wir wollen so etwas beweisen können wie

Alle Leute, die Alkohol kaufen dürfen, sind älter als 10 Jahre.

Die Situation von Beispiel 3.1 tritt auch direkt in der Mathematik auf: Oft kommt es vor, dass mathematische Sätze mit Unbekannten formuliert werden, deren Wert erst später (zum Beispiel bei Anwendung des Satzes) bekannt ist. Wir werden nun Aussagen einführen, die auch Variablen erlauben, so genannte Prädikate.

Definition 3.2 (Prädikat)**.** Ein **Prädikat** $A(X_1, ..., X_n)$ ist ein sprachliches Gebilde mit Variablen $X_1, ..., X_n$, das zu einer Aussage wird, wenn für jede Variable $X_1, ..., X_n$ ein konkreter Wert eingesetzt wird.

Bemerkung 3.3. Auf Prädikaten können dieselben Operatoren angewandt werden wie auf Aussagen. Beachte aber, dass das Ergebnis dann immernoch ein Prädikat ist und keine Aussage!

Beispiel 3.4. Definiere

$$A(X) := \text{"}X \text{ darf Alkohol kaufen"},$$

und

$$B(X) := \text{"}X \text{ ist älter als 10 Jahre"}.$$

Die Interpretation des Prädikats $A(\text{Steffen}) \Rightarrow B(\text{Steffen})$ lautet: "Wenn Steffen Alkohol kaufen darf, dann ist Steffen älter als 10 Jahre."

Definition 3.5 (Prädikat Elementrelation)**.** Für X ein Objekt und M eine beliebige Menge können wir das Prädikat

$$E(X, M) := X \in M$$

definieren.
Interpretation: "X ist Element von M".

Beispiel 3.6. Die Aussage $E(2, \{1, 2, 3\}) =$"2 ist Element von {1,2,3}" ist wahr. Also gilt $2 \in \{1, 2, 3\}$ (Infix-Notation).
Die Aussage $E(4, \{1, 2, 3\})$ ist falsch, also gilt $\neg(4 \in \{1, 2, 3\})$.

Wie können wir aus Prädikaten wieder Aussagen gewinnen? Eine Möglichkeit ist, konkrete Werte für die Variablen einzusetzen. Die resultierenden Aussagen für sich genommen sind aber sehr schwach, damit erreichen wir keine Aussage wie in Bsp.3.1. In der Prädikatenlogik wurden daher "Quantoren" eingeführt. Diese geben formal richtig an, für wie viele Objekte C ein bestimmtes Prädikat gilt und erleichtern somit auch die Formalisierung von Gedanken.

Definition 3.7 (Quantoren: All-Quantor und Existenz-Quantor)**.** Die Aussage

$$\forall X : A(X)$$

ist wahr, wenn für alle Objekte X die Aussage $A(X)$ wahr ist. $\forall$ heißt **All-Quantor**.
Die Aussage

$$\exists X : A(X)$$

ist wahr, wenn es (mindestens) ein Objekt X gibt, sodass die Aussage $A(X)$ wahr ist. $\exists$ heißt **Existenz-Quantor**.

Zum Erreichen einer Aussage wie in Bsp.1.3 können wir also auch Quantoren als Werkzeug verwenden.
Die Quantoren alleine reden von allen möglichen Objekten/Variablen X, d.h. mit X können alle möglichen Zahlen, Mengen, etc. gemeint sein. Wollen wir unsere Aussagen auf bestimmte Teilmengen einschränken, brauchen wir dazu zusätzliche Prädikate.

Beispiel 3.8. Für zwei Prädikate $A(X), B(X)$ ist

$$\forall X : (A(X) \Rightarrow B(X))$$

eine Aussage.
Interpretation: "Für alle X gilt: Wenn $A(X)$ wahr ist, dann ist auch $B(X)$ wahr".
Für eine feste Menge M und ein Prädikat $A(X)$ sind

$$\forall X : (E(X, M) \Rightarrow A(X)) \tag{1}$$
$$\exists X : (E(X, M) \land A(X)) \tag{2}$$

Aussagen.
Interpretation: (1): "Für alle X aus der Menge M ist $A(X)$ wahr", bzw. (2): "Es gibt ein X aus der Menge M, für welches $A(X)$ wahr ist".
Für Aussagen der Form (1) und (2) können wir auch die Infix-Notation als Abkürzungen, bzw. einfachere und übersichtlichere Schreibweise, verwenden, die in der Mathematik allgemein gebräuchlich ist:

$$\forall X \in M : A(X)$$
$$\exists X \in M : A(X)$$

3.2 Negation von Quantoren

Bemerkung 3.9 (Negation von Quantoren)**.** Für ein Prädikat $A(X)$ gilt:

$$\neg(\exists X : A(X)) \Leftrightarrow \forall X : \neg A(X),$$

die Negation von "Es existiert ein X, sodass $A(X)$ wahr" ist also "Für alle X, ist $A(X)$ falsch".

Es gilt weiter:

$$\neg(\forall X : A(X)) \Leftrightarrow \exists X : \neg A(X),$$

die Negation von “Für alle X ist $A(X)$ wahr“ ist also “Es existiert ein X, für das $A(X)$ falsch ist“.

(Achtung: Die Negation der Aussage $(\forall X : A(X))$ lautet also nicht etwa “Für alle X ist $A(X)$ falsch“! Denn offensichtlich würde dann die Aussage und ihre Negation nicht alle Möglichkeiten abdecken: Der Fall, dass $A(X)$ für genau zwei X falsch ist, wäre weder in der Aussage noch ihrer Negation enthalten.)

Lemma 3.10. Für zwei Aussagen A, B gilt:

$$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$$

Beweis.

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg(A \Rightarrow B)$	$\neg B$	$(A \wedge \neg B$	$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$
w	w	w	f	f	f	w
w	f	f	w	w	w	w
f	w	w	f	f	f	w
f	f	w	f	w	f	w

□

Korollar 3.11. Für eine Menge M und ein Prädikat $A(X)$ gilt:

$$\neg(\forall X \in M : A(X)) \Leftrightarrow \exists X \in M : \neg A(X)$$
$$\neg(\exists X \in M : A(X)) \Leftrightarrow \forall X \in M : \neg A(X)$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}\neg(\forall X \in M : A(X)) &\Leftrightarrow \neg(\forall X : (E(X, M) \Rightarrow A(X))) \\ &\Leftrightarrow \exists X : \neg(E(X, M) \Rightarrow A(X)) \\ &\overset{3.10}{\Leftrightarrow} \exists X : E(X, M) \wedge \neg A(X) \\ &\Leftrightarrow \exists X \in M : \neg A(X)\end{aligned}$$

Der zweite Teil kann mit einer ähnlichen Rechnung bewiesen werden. □

Rückblick

Mit den Kenntnissen dieses Vortrags haben wir das nötige Grundwerkzeug, um Mathematik zu betreiben. Wir wissen nun, was Aussagen sind und wie wir diese “weiterverarbeiten“ können. Außerdem haben wir die wichtigsten Operatoren kennengelernt, mit denen wir einen Großteil der mathematischen Sätze strukturell nachvollziehen können. Wir haben das Prinzip kennengelernt, einen Satz zu formulieren, diesen zu beweisen und aus alten Sätzen neue zu gewinnen. Beweise können wir schon mittels Wahrheitstafel führen. Andere Beweismethoden werden im folgenden Vortrag vorgestellt. Zusätzlich können wir nun Aussagen für eine bestimmte Menge von Objekten spezifizieren und somit versuchen, sie so allgemein wie möglich zu fassen. Dafür haben wir die zwei wichtigsten Quantoren kennengelernt.

Also können wir die Struktur mathematischer Literatur nachvollziehen und unsere mathematischen Gedanken formal korrekt verfassen. Nun fehlen uns nur noch mathematische Inhalte und auch dazu werden wir Grundlagen in den folgenden Vorlesungen kennenlernen.