Mengen, natürliche Zahlen, Induktion

Caroline Edmaier*

WS2017/18

Inhaltsverzeichnis

1 Motivation **2**

2 Mengen **2**

2.1 Defintion eines Mengenbegriffes 2

2.2 Mengen-Bastelstunde 3

3 Natürliche Zahlen **4**

3.1 Peano-Axiome 4

3.2 Formale Konstruktion 4

4 Vollständige Induktion **6**

*basierend auf dem früheren Vortrag von Saskia Klaus

1 Motivation

Wir haben im Beweismethoden-Vortrag die Struktur eines Satzes kennengelernt. Hier können wir aus einer Prämisse eine Konklusion folgern. Damit das sinnvoll gelingt, muss die Prämisse wahr sein. Weil wahre Aussagen nicht einfach vom Himmel fallen, müssen wir uns auf etwas einigen, was wir als wahr annehmen. Darauf basiert letztendlich die gesamte Mathematik.

Wir nennen diese als wahr angenommenen Aussagen **Axiome**. Da wir heute in die Mathematik einsteigen wollen, beschäftigen wir uns mit eben diesen. Der Ansatz liegt in der Mengenlehre, da wir, wenn wir über Mathematik sprechen, intuitiv anfangen, über **Mengen** von Zahlen oder anderen Objekten zu sprechen. Es ist also sinnvoll, einen festen Mengenbegriff zu definieren.

Diese Definition fällt jedoch sehr kompliziert aus, wenn man alles formal richtig machen möchte. Deswegen gibt es in der Mathematik ein ganzes Teilgebiet namens **Mengenlehre**. Für unsere Zwecke reicht uns jedoch ein naiver Mengenbegriff, mit dem wir uns in diesem Vortrag auseinandersetzen werden.

Außerdem betrachten wir das konkrete Beispiel der Menge der **natürlichen Zahlen** und untersuchen eine Besonderheit dieser Menge, die uns das Prinzip der **vollständigen Induktion** liefert.

2 Mengen

2.1 Defintion eines Mengenbegriffes

Definition 2.1 (nach Georg Cantor, 19. Jhd.)**.** Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung bestimmter wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Eine Menge ist nicht angeordnet.

Notation 2.2. Sei M eine Menge. Wir haben folgende Möglichkeiten, M zu notieren:

- Aufzählung von Elementen, z.B.: $M = \{\text{Donuts, Kuchen, } 5\}$ oder $M = \{1, 2, 3, ...\}$
- Definition über charakterisierende Eigenschaft: $M = \{x | x \text{ erfüllt Eigenschaft } E\}$

Ist m ein Element von M, d.h. tritt m in einer solchen Aufzählung auf oder erfüllt die charakterisierende Eigenschaft einer Menge, so schreiben wir:

$$m \in M.$$

Ist m kein Element von M, so schreiben wir:

$$m \notin M.$$

Beispiel. $M = \{x \in \mathbb{N} | 3 < x < 7\} = \{4, 5, 6\}$
Außerdem: $M = \{6, 5, 4, 4\}$ (das versteckt sich hinter den Begriffen "wohlunterschieden" und "nicht angeordnet".)

Bemerkung. Man kann einer Menge eine **Kardinalität** zuordnen. Formal definiert ist das etwas komplizierter, aber für die Zwecke unseres Vortrags, reicht erstmal: Wieviele Elemente hat eine Menge?
Notation: $\#M$ oder $|M|$

Definition 2.3. Es gibt genau eine Menge mit Kardinalität 0. Wir nennen sie die **leere Menge**.
Notation: $\emptyset$

Definition 2.4. Seien M und N Mengen. Es ist N eine Teilmenge von M, falls gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \in M$$

Notation: $N \subseteq M$ bzw. $N \subset M$
Wir nennen M eine **echte Teilmenge** von M, falls gilt:

$$N \subseteq M \ \wedge \ \exists m \in M : m \notin N$$

Notation: $N \subsetneq M$
M und N heißen **gleich**, falls gilt:

$$M \subseteq N \ \wedge \ N \subseteq M$$

Notation: $N = M$

Satz 2.5. Seien L, N, M Mengen mt $L \subseteq N$, $N \subseteq M$. Dann gilt $L \subseteq M$.

Beweis. Sei $x \in L$ beliebig. Da $L \subseteq N$ gilt $x \in N$ und da $N \subseteq M$ gilt $x \in M$. □

2.2 Mengen-Bastelstunde

Wir beschäftigen uns jetzt mit Operatoren, die wir auf Mengen anwenden können, um aus mehreren Mengen neue Mengen zu generieren.

Definition 2.6. Sei M eine Menge mit $A, B \subseteq M$ Teilmengen von M. Wir definieren:

i) den **Schnitt** von A und B: $A \cap B := \{x \in M | x \in A \wedge x \in B\}$
ii) die **Vereinigung** von A und B: $A \cup B := \{x \in M | x \in A \vee x \in B\}$
iii) das **kartesische Produkt** von A und B: $A \times B := \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$
iv) das **Komplement** von A in M: $M \setminus A := \{x \in M | x \notin A\}$

Beispiel. Sei $M = \{1, 2, ..., 10\}$, $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{1, 4, 7\}$. Dann gilt:

i) $A \cap B = \{1, 4\}$
ii) $A \cup B = \{1, 2, 4, 7\}$
iii) $A \times B = \{(1, 1), (1, 4), (1, 7), (2, 1), (2, 4), (2, 7), (4, 1), (4, 4), (4, 7)\}$
iv) $M \setminus A = \{5, 6, ..., 10\}$

Definition 2.7. Die **Potenzmenge** von einer Menge M ist die Menge aller Teilmengen von M:

$$\mathcal{P}(M) = \{N | N \subset M\}$$

Es gilt stets $\emptyset \in \mathcal{P}(M)$, $M \in \mathcal{P}(M)$, da $\emptyset \subset M$ und $M \subset M$ immer wahr ist.

Satz 2.8. Sei M eine endliche Menge, d.h. $|M| = n < \infty$. Dann gilt:

$$|\mathcal{P}(M)| > |M|$$

Beweis. Schreibe $M = \{x_1, ..., x_n\}$. Dann gilt für alle $i \in \{1, ..., n\}$:

$$\{x_i\} \in \mathcal{P}(M)$$

Es gilt aber auch $\emptyset \in \mathcal{P}(M)$, also:

$$|\mathcal{P}(M)| \geq n + 1 > n = |M|$$

□

3 Natürliche Zahlen

Die erste Menge, die den meisten Leuten einfällt, wenn sie an Mathematik denken, sind die **natürlichen Zahlen**. Wir wollen uns in diesem Vortrag auch nach dieser Intuition richten und uns die natürlichen Zahlen als mathematisches Konstrukt anschauen. Dazu betrachten wir, wie sich diese Menge formal definieren und konstruieren lässt.

Der übliche Nutzen der natürlichen Zahlen in der Mathematik ist, dass wir zählen und nummerieren wollen, wie auch im alltäglichen Leben. Nur, dass wir in der Mathematik mehr die Tatsache nutzen, dass es unendlich viele natürliche Zahlen gibt.

3.1 Peano-Axiome

Definition 3.1 (Peano-Axiome)**.** Erfüllt eine Menge die **Peano-Axiome**, so nennen wir sie die Menge der **natürlichen Zahlen**.

P1) $1 \in \mathbb{N}$

P2) $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n' \in \mathbb{N}$, wobei n' den Nachfolger von n bezeichnet.

P3) $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n' \neq 1$

P4) $m, n \in \mathbb{N}$ und $m' = n'$, so $m = n$

P5) Ist M eine Menge, so dass $1 \in M$ und $\forall n \in \mathbb{N} : (n \in M \Rightarrow n' \in M)$, so gilt $M = \mathbb{N}$

Notation: $\mathbb{N}$

Um das Axiomsystem zu überprüfen, sind zwei Fragen zu klären:

1) Existiert ein Objekt mit den geforderten Eigenschaften?

2) Ist das Objekt durch die gegebenen Eigenschaften eindeutig bestimmt?

Wir werden in diesem Vortrag nicht auf die zweite Frage eingehen, da die meisten Leser noch nicht genügend Wissen haben, um die mathematische Begründung nachzuvollziehen.

3.2 Formale Konstruktion

Definition 3.2. Wir setzen:

$$\begin{aligned} 1 &:= \mathcal{P}(\emptyset) &&= \{\emptyset\} \\ 2 &:= \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) &&= \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\ 3 &:= \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) &&= \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}, \emptyset\} \\ &\text{usw.} \end{aligned}$$

Dann ist $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$.

Wir können auf $\mathbb{N}$ eine Addition und eine Multiplikation definieren: Seien dazu $n, m \in \mathbb{N}$.

Definition 3.3. Setze $n + 1 := n'$ und $n + m' = (n + m)'$,
analog: $n \cdot 1 := n$ und $n \cdot m' = (n \cdot m) + n$

Beispiel.

$$\begin{aligned} &n + 3 = n + 2' = (n + 2)' = (n + 1')' = ((n + 1)')' = ((n')')' \\ &n \cdot 3 = n \cdot 2' = (n \cdot 2) + n = (n \cdot 1') + n = ((n \cdot 1) + n) + n = n + n + n \end{aligned}$$

Satz 3.4. Es ist $|\mathbb{N}| = \infty$.

Beweis. Beweis durch Widerspruch. Angenommen $|\mathbb{N}| = m < \infty$.
Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $|n_0|$ maximal in $\mathbb{N}$ ist. Nach Konstruktion in 3.2 ist dann auch $\mathcal{P}(n_0) \in \mathbb{N}$, aber nach Satz 2.8 gilt $|\mathcal{P}(n_0)| > |n_0|$ ↯ im Widerspruch zur Maximalität von $|n_0|$. $\square$

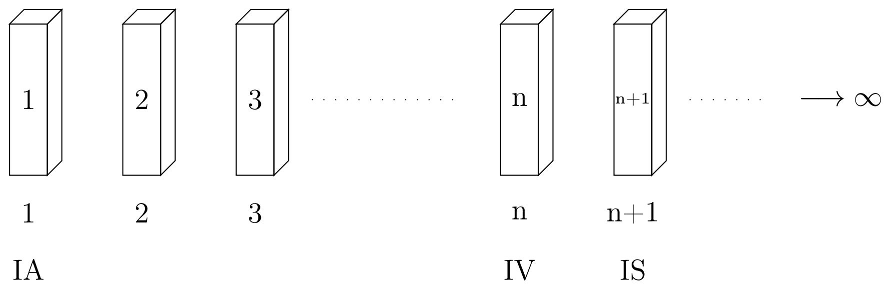
4 Vollständige Induktion

Aus dem fünften Peano-Axiom kann man ein Beweisprinzip ableiten, welches sich **vollständige Induktion** nennt. Die Voraussetzung hierfür ist, dass wir eine Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ zeigen wollen. Man geht nach der folgenden Anleitung vor:

1) **Induktionsanfang:** Zeige die Aussage für $n = 1$.

2) **Induktionsvoraussetzung:** Gelte die Aussage für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$.

3) **Induktionsschritt:** Folgere aus der Induktionsvoraussetzung, dass die Aussage auch für $n + 1$ gilt.



Wieso gilt die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$?
Sei A eine Aussage und gelte:

- A gilt für 1
- A gilt für $n \Rightarrow A$ gilt für $n + 1$

Setze $M = \{n \in \mathbb{N} | A \text{ ist wahr für } n\}$. Nach P5 gilt: $M = \mathbb{N}$.

Satz 4.1. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n + 1)$.

Beweis. Induktionsanfang: Sei $n = 1$. Dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1 + 1)$$

Induktionsvoraussetzung: Es gelte $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n + 1)$ für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsschritt: Wir müssen nun zeigen: $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{1}{2} \cdot (n + 1) \cdot (n + 1)$.
Es ist:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + n + 1 \overset{\text{IV}}{=} \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n + 1) + (n + 1) = (n + 1) \cdot (\frac{1}{2} \cdot n + 1) = \frac{1}{2} \cdot (n + 1) \cdot (n + 2).$$

□

Satz 4.2. Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=1}^{n}(2k - 1) = n^2$

Beweis. Induktionsanfang: Sei $n = 1$. Dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{1}(2k - 1) = 2 - 1 = 1 = 1^2$$

Induktionsvoraussetzung: Es gelte $\sum_{k=1}^{n}(2k - 1) = n^2$ für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsschritt: Es ist zu zeigen: $\sum_{k=1}^{n+1}(2k - 1) = (n + 1)^2$.

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k - 1) = \sum_{k=1}^{n}(2k - 1) + 2(n + 1) - 1 \overset{\text{IV}}{=} n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

□