Ruprecht-Karls Universität Heidelberg — Übungsbetrieb
Fachschaft MathPhys
Vorkurs

Aufgabenvorschläge

Anmerkung:
Bereits bewiesene Sätze (auch aus den Vorträgen) dürfen benutzt werden. Es ist euch überlassen, welche Aufgaben ihr in der Gruppe rechnet. Ihr solltet die Aufgaben aber vorher einmal selbst gerechnet haben.

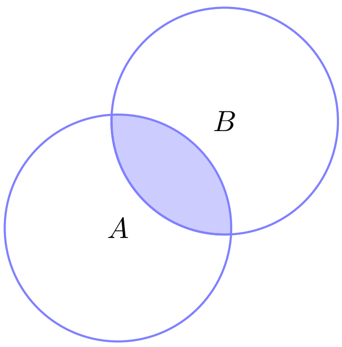
Elementare Beweise zu Mengenoperationen:
Seien A und B Mengen. Beweise:

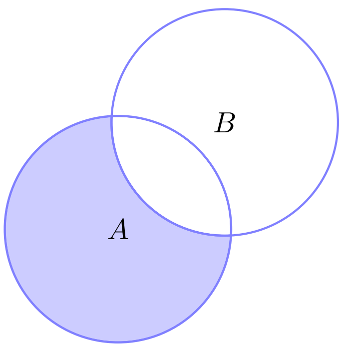
1. $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$
2. $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$
3. $A \cap B \subseteq A \cup B$

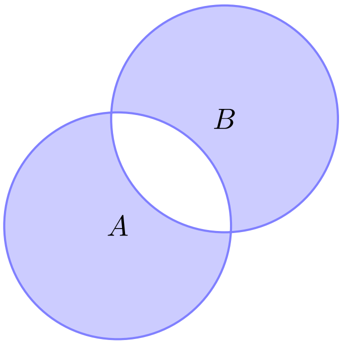
Komplexere Beweise zu Mengenoperationen:
Sei M eine Menge, $A, B \subseteq M$ Teilmengen. Beweise:

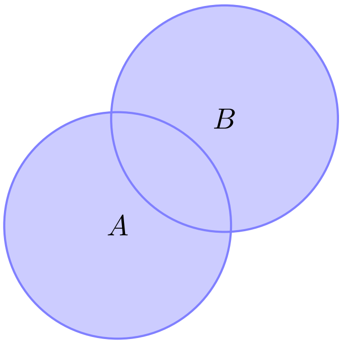
1. $M \setminus (M \setminus A) = A$
2. $M \setminus (A \cap B) = (M \setminus A) \cup (M \setminus B)$
3. $M \setminus (A \cup B) = (M \setminus A) \cap (M \setminus B)$

Schnitte und Vereinigungen anschaulich:
Betrachte die folgenden Bilder und gib jeweils die markierten Bereiche mit Hilfe der Mengen A, B sowie der bekannten Mengenoperationen an.

1. 

2. 

3. 

4. 

Schnitte und Vereinigungen vereinfachen:
Seien A, B, C Mengen mit $A \subseteq B \subseteq C$. Wie lassen sich folgende Ausdrücke vereinfachen?

1. $(A \cup B) \cap (B \cup C)$
2. $(A \cap B) \cup (B \cap C)$
3. $(A \cup B \cup C) \cap (A \cap B \cap C)$

Schnitte und Vereinigungen: Falsche Freunde
Seien A, B, C beliebige Mengen. Beweise oder widerlege: $A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C$. Unter welchen Bedingungen gilt die Aussage?

Kardinalität: *(hier hilft der 2. Aufgabenblock)*
Sei M eine Menge, $A, B \subseteq M$ Teilmengen. Es gelte $|M| = 100$, $|A| = 20$, $|B| = 10$ sowie $|(M \setminus A) \cap (M \setminus B)| = 75$. Was ist $|A \cap B|$?

Vollständige Induktion:
Beweise folgende Aussagen mit vollständiger Induktion:

1. 3 teilt $n^3 - n \; \forall n \in \mathbb{N}$
2. $\sum_{i=1}^{n} (2i-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$
3. $2^n > n$
4. $(1+x)^n \geq 1 + nx \; \forall x \in \mathbb{R}$ mit $x > -1$
5. Definiere $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$. Dann gilt $a_n = \frac{n+1}{n}$.
6. Definiere $a_1 = 2$, $a_n = a_{n-1} + n \cdot 2^n$. Dann gilt $a_n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$.
7. Definiere $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{1}{a_n}\right)$. Dann gilt $\frac{1}{2} \leq a_n \leq 2$.