Komplexe Zahlen

Vorkurs Mathematik

Jonas Müller

13. Oktober 2017

Dieser Vortrag ist für den mathematischen Vorkurs der Fachschaft MathPhys der Universität Heidelberg im Oktober 2017 konzipiert. Er basiert auf dem Funktionentheorie 1 Skript von Hendrik Kasten[1] und einem früheren Vorkursvortrag von Nithi Rungtanapirom.

Inhaltsverzeichnis

[1] https://www.mathi.uni-heidelberg.de/~kasten/funktheo1.html

1 Körper

Wir wollen jetzt eine neue Zahl i einführen, so dass dann gilt $i^2 = -1$. Allgemein muss man aber sehr vorsichtig beim Einführen neuer Zahlen sein, man weiß nicht notwendigerweise, dass alle Eigenschaften erhalten bleiben. Zum Beispiel kann man keine Zahl ξ definieren mit $0 \cdot \xi = 1$, so dass die wichtigen Eigenschaften reeller Zahlen erhalten bleiben.

Angenommen wir hätten eine solche Zahl ξ, dann würde gelten

$$0 = 2 \cdot 0$$

multiplizieren wir jetzt beide Seiten mit ξ, erhalten wir

$$1 = 0 \cdot \xi = (2 \cdot 0) \cdot \xi = 2 \cdot (0 \cdot \xi) = 2 \cdot 1 = 2 \qquad ↯$$

Um zu garantieren, dass i eine bessere Zahl ist als ξ, wollen wir nun ein paar Eigenschaften festhalten, die eine Menge von Zahlen erfüllen sollten.

Definition 1. Ein Körper K ist eine Menge mit zwei Abbildungen

$$+, \cdot \colon K \times K \to K$$

und zwei Elementen $0, 1 \in K$, so dass gilt:

(i) $(K,\ +,\ 0)$ ist eine abelsche Gruppe, also

- a) $\forall x \in K \quad x + 0 = x$ (Additiv neutrales Element)
- b) $\forall x \in K\ \exists y \in K \quad x + y = 0$ (Additiv inverses Element)
- c) $\forall x, y, z \in K \quad (x + y) + z = x + (y + z)$ (Assoziativität)
- d) $\forall x, y \in K \quad x + y = y + x$ (Kommutativität)

(ii) $(K \setminus \{0\},\ \cdot,\ 1)$ ist eine abelsche Gruppe, also

- a) $\forall x \in K \quad x \cdot 1 = x$ (Multiplikativ neutrales Element)
- b) $\forall x \in K\ \exists y \in K \quad x \cdot y = 1$ (Multiplikativ inverses Element)
- c) $\forall x, y, z \in K \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (Assoziativität)
- d) $\forall x, y \in K \quad x \cdot y = y \cdot x$ (Kommutativität)

(iii) $\forall x, y, z \in K \quad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ (Distributivgesetz)

Für $x \in K$ bezeichnen wir das additiv inverse Element mit $-x$ und das multiplikativ inverse Element mit x^{-1}. Bei der Multiplikation werden wir häufig den Punkt weglassen und xy statt $x \cdot y$ zu schreiben.

Beispiel 2. (i) $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ sind keine Körper.

(ii) $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind Körper.

2 Konstruktion der komplexen Zahlen

Definition 3 (komplexe Zahlen). Sei i ein formales Symbol. Wir definieren die komplexen Zahlen als

$$\mathbb{C} := \{a + ib \quad | \quad a, b \in \mathbb{R}\}$$

und definieren die Abbildungen

$$+, \cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

für $(a + ib),\ (c + id) \in \mathbb{C}$ durch

$$(a + ib) + (c + id) := (a + c) + i(b + d)$$

$$(a + ib) \cdot (c + id) := (ac - bd) + i(ad + cb).$$

Satz 4. *Diese Abbildungen sind wohldefiniert und die komplexen Zahlen bilden einen Körper mit den neutralen Elementen $0 + i0$ und $1 + i0$.*

Beweis. Seien $a + ib,\ c + id,\ e + if \in \mathbb{C}$.

(i) Zeige zuerst $(\mathbb{C},\ +,\ 0 + i0)$ ist eine abelsche Gruppe

a) $(a + ib) + (0 + i0) = (a + 0) + i(b + 0) = a + ib$

b) $a + ib \in \mathbb{C} \Longrightarrow (-a) + i(-b) \in \mathbb{C}$
und damit $(a + ib) + ((-a) + i(-b)) = (a - a) + i(b - b) = 0 + i0$

c) Es gilt $((a + ib) + (c + id)) + (e + if) = ((a + c) + i(b + d)) + (e + if)$
$= (a + c + e) + i(b + d + f)$
und $(a + ib) + ((c + id) + (e + if)) = (a + c + e) + i(b + d + f)$, also gilt Gleichheit.

d) $(a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d) = (c+a)+i(d+b) = (c+id)+(a+ib)$

(ii) Zeige nun, dass $(\mathbb{C} \setminus \{0 + i0\},\ \cdot,\ 1 + i0)$ eine abelsche Gruppe

a) $(a + ib) \cdot (1 + i0) = (a \cdot 1 - b \cdot 0) + i(b \cdot 1, a \cdot 0) = a + ib$

b) $\frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{-b}{a^2+b^2}$ ist das multiplikativ Inverse von $a + ib$, denn

$$\begin{aligned}(a + ib) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2} + i\frac{-b}{a^2 + b^2}\right)&\\ &= \left(a \cdot \frac{a}{a^2 + b^2} - b \cdot \frac{-b}{a^2 + b^2}\right) + i\left(b\frac{a}{a^2 + b^2} + a\frac{-b}{a^2 + b^2}\right)\\ &= \left(\frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2}\right) + i\left(\frac{ab}{a^2 + b^2} - \frac{ab}{a^2 + b^2}\right)\\ &= 1 + i0\end{aligned}$$

c) nachrechnen, wie oben

d) nachrechnen

(iii) Zeige nun das Distributivgesetz

$$\begin{aligned}((a+ib)+(c+id))\cdot(e+if) &= ((a+c)+i(b+d))\cdot(e+if)\\ &= ((a+c)e-(b+d)f)+i((b+d)e+(a+c)f)\\ &= (ae+ce-bf-df)+i(be+de+af+cf)\\ &= (ae-bf)+i(be+af)+(ce-fd)+i(de+cf)\\ &= (a+ib)(e+if)+(c+id)(e+if)\end{aligned}$$

q.e.d.

Notation 5. Wir schreiben im folgenden $a+i0$ als a, $0+ib$ als ib und $0+i1$ als i. Damit erhalten wir das Erhoffte $i^2=-1$.

Bemerkung 6. Für reelle Zahlen $x,y\in\mathbb{R}$ gilt somit auch $x\cdot_{\mathbb{R}}y=x\cdot_{\mathbb{C}}y$ und $x+_{\mathbb{R}}y=x+_{\mathbb{C}}y$.

Beispiel 7. Jetzt können wir sehr einfach mit den komplexen Zahlen rechnen, z. B.

$$\begin{aligned}(-4-1i)+(2+2i) &= (-4+2)+i(-1+2)=-2+1i\\ (1+3i)\cdot(2+2i) &= (1\cdot 2-3\cdot 2)+i(3\cdot 2+1\cdot 2)=-4+8i\\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 &= \frac{1}{2}(1+i)^2=\frac{1}{2}(1+i)\cdot(1+i)=\frac{1}{2}((1-1)+i(1+1))\\ &= \frac{1}{2}\cdot 2i=i\end{aligned}$$

Wir stellen insbesondere fest, dass i eine Wurzel hat. Später wollen wir uns damit beschäftigen, wie man die Wurzeln von beliebigen Zahlen berechnet, vorher führen wir allerdings noch ein paar weitere Begriffe ein, um ein besseres Verständnis von komplexen Zahlen zu erhalten.

Definition 8. Für $z=a+ib\in\mathbb{C}$ definieren wir uns $\operatorname{Re}(z):=a$ den Real- und $\operatorname{Im}(z):=b$ den Imaginärteil von z.

Das komplex Konjugierte $\overline{z}:=a-ib$ von z.

Proposition 9. *Für $z,w\in\mathbb{C}$ gilt:*

(i) $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$ *und* $\overline{z\cdot w}=\overline{z}\cdot\overline{w}$

(ii) $\operatorname{Re}(z)=\frac{z+\overline{z}}{2}$ *und* $\operatorname{Im}(z)=\frac{z-\overline{z}}{2i}$

(iii) $\overline{z}=z\iff z\in\mathbb{R}$

(iv) $\overline{\overline{z}}=z$

Beweis. Seien $z=(a+ib),\ w=(c+id)\in\mathbb{C}$

(i) Es gilt:

$$\begin{aligned}\overline{z+w} &= \overline{(a+c)+i(b+d)}=(a+c)-i(b+d)\\ &= (a-ib)+(c-id)=\overline{z}+\overline{w}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{z\cdot w} &= \overline{(ac-bd)+i(bc+ad)}=(ac-bd)-i(bc+ad)\\ &= (a-ib)\cdot(c-id)=\overline{z}\cdot\overline{w}\end{aligned}$$

(ii) Es gilt:

$$\frac{1}{2}(z+\overline{z}) = \frac{1}{2}((a+ib)+(a-ib)) = \frac{1}{2}(2a) = a = \mathrm{Re}(z)$$
$$\frac{1}{2i}(z-\overline{z}) = \frac{1}{2i}((a+ib)-(a-ib)) = \frac{1}{2i}(2ib) = b = \mathrm{Im}(z)$$

(iii) Es gilt:

$$\begin{aligned} & \overline{z} = z \\ \iff \quad & 0 = z - \overline{z} = 2i \cdot \mathrm{Im}(z) \\ \iff \quad & z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(iv) $\overline{\overline{z}} = \overline{a - ib} = a + ib = z$

q.e.d.

Satz 10. *Sei $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein reelles Polynom, das heißt $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ mit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Sei z_0 eine Nullstele von p, d. h. $p(z_0) = 0$. Dann ist $\overline{z_0}$ ebenfalls eine Nullstelle von p. Allgemeiner gilt für $z \in \mathbb{C}$ $p(\overline{z}) = \overline{p(z)}$.*

Beweis. Sei $z \in \mathbb{C}$ und p wie oben. Dann gilt

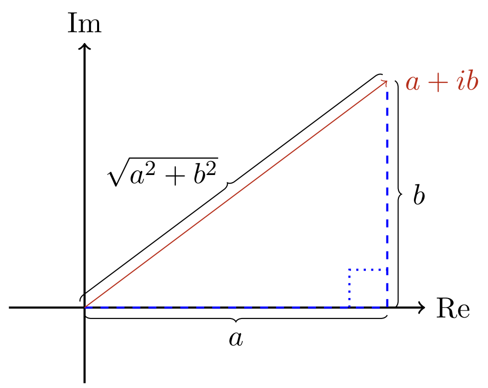
$$\begin{aligned} p(\overline{z}) &= a_0 + a_1\overline{z} + \ldots + a_n\overline{z}^n \\ &= \overline{a_0} + \overline{a_1 z} + \ldots + \overline{a_n z^n} \\ &= \overline{a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n} \\ &= \overline{p(z)} \end{aligned}$$

Für z_0 eine Nullstelle von p gilt insbesondere

$$p(\overline{z}_0) = \overline{p(z_0)} = \overline{0} = 0$$

q.e.d.

Wir würden nun gerne die Größe einer Zahl betrachten. Dafür eignet sich der Abstand von der 0. Um diesen zu berechnen, hilft uns die folgende geometrische Veranschaulichung:



Definition 11. Sei $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Wir definieren den Absolutbetrag von z durch $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Proposition 12. *Für den Absolutbetrag gelten folgende Eigenschaften, für $z, w \in \mathbb{C}$*

(i) $|z|^2 = z\overline{z}$

(ii) $|z| \geqslant 0,\ |z| = 0 \iff z = 0$ *(Positiv definit)*

(iii) $|zw| = |z| \cdot |w|$ *(Homogenität)*

(iv) $|z + w| \leqslant |z| + |w|$ *(Dreiecksungleichung)*

(v) $|z - w| \geqslant ||z| - |w||$ *(Untere Dreiecksungleichung)*

Also ist der Absolutbetrag ein echter Betrag.

Beweis. Seien $z = a + ib,\ w = c + id \in \mathbb{C}$.

(i) Nachrechnen ergibt

$$z\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = (a^2 + b^2) + i(ab - ab) = a^2 + b^2 = |z|^2$$

(ii) Es gilt, da $a,\ b \in \mathbb{R}$: $a^2 + b^2 \in \mathbb{R} \ \wedge \ a^2 + b^2 \geqslant 0$ und insbesondere also $\sqrt{a^2 + b^2} \geqslant 0$. Zusätzlich gilt:

$$\begin{aligned} & |z| = 0 \\ \iff \quad & a^2 + b^2 = 0 \\ \iff \quad & a = 0 \ \wedge \ b = 0 \\ \iff \quad & z = 0 \end{aligned}$$

(iii) Für zwei reelle Zahlen $x,\ y \in \mathbb{R}$: $x, y \geqslant 0$ gilt $x = y \iff x^2 = y^2$. Also genügt es $|zw|^2 = (|z| \cdot |w|)^2 = |z|^2 \cdot |w|^2$ zu zeigen. Dies folgt direkt mit 1.:

$$|zw|^2 = zw \cdot \overline{zw} = z\overline{z} \cdot w\overline{w} = |z|^2 \cdot |w|^2$$

(iv) Für $x,\ y \in \mathbb{R}$: $x, y \geqslant 0$ gilt auch $x \leqslant y \iff x^2 \leqslant y^2$. Also genügt es, $|z + w|^2 \leqslant (|z| + |w|)^2$ zu zeigen. Durch umformen beider Seiten erhalten wir:

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)\overline{(z + w)} = z\overline{z} + z\overline{w} + \overline{z}w + w\overline{w} \\ &= z\overline{z} + z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} + w\overline{w} \\ &= |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{w}) + |w|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (|z| + |w|)^2 &= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = |z|^2 + 2|z||\overline{w}| + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2 \end{aligned}$$

Nun gilt aber für eine komplexe Zahl $e + if \in \mathbb{C}$: $Re(e + if) = e = \sqrt{e^2} \leqslant \sqrt{e^2 + f^2} = |e + if|$. Also haben wir $|z + w|^2 \leqslant (|z| + |w|)^2$.

(v) Wir setzen $\tilde{z} := z - w,\ \tilde{w} := w$ und erhalten mit der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} & |z| = |\tilde{z} + \tilde{w}| \leqslant |\tilde{z}| + |\tilde{w}| = |z-w| + |w| \\ \iff \quad & |z| - |w| \leqslant |z-w| \end{aligned}$$

Erhalte analog $|w| - |z| \leqslant |z - w|$. Also gilt die untere Dreiecksungleichung.

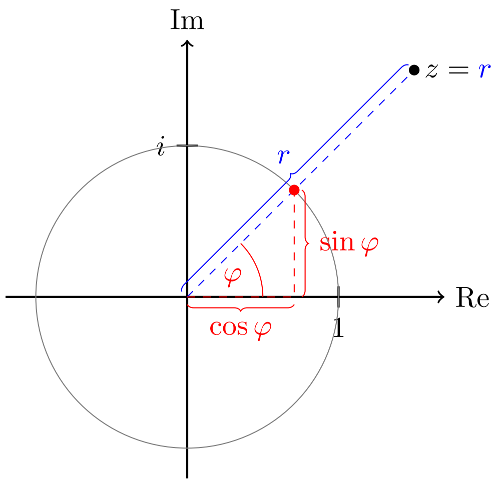
q.e.d.

3 Polarkoordinaten

Wenn wir nun eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ als $z = |z| \cdot \frac{z}{|z|}$ schreiben, erhalten wir eine komplexe Zahl $x + iy = \frac{z}{|z|}$ auf dem Einheitskreis. Also gibt es einen Winkel $\varphi \in \mathbb{R}$, so dass $x = \cos\varphi$ und $y = \sin\varphi$. Mit $r = |z|$ erhalten wir:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Dies sind die Polarkoordinaten von z. Diese können wir folgendermaßen visualisieren



Erinnerung 13 (Additionstheoreme). Für $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$ gilt

(i) $(\cos\varphi)^2 + (\sin\varphi)^2 = 1$

(ii) $\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi = \cos(\varphi + \psi)$

(iii) $\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi = \sin(\varphi + \psi)$

(iv) $\sin(\varphi + k \cdot 2\pi) = \sin\varphi$ für $k \in \mathbb{Z}$

(v) $\cos(\varphi + k \cdot 2\pi) = \cos\varphi$ für $k \in \mathbb{Z}$

Korollar 14. *Für die Multiplikation zweier komplexer Zahlen $z = r(\cos\varphi + i\sin\psi),\ w = s(\cos\psi + i\sin\psi) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ in Polarkoordinaten gilt*

$$z \cdot w = rs(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi))$$

Beweis.

$$\begin{aligned} z \cdot w &= r(\cos\varphi + i\sin\psi) \cdot s(\cos\psi + i\sin\psi) \\ &= rs((\cos\varphi\cos\psi + i^2\sin\varphi\sin\psi) + i(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi) \\ &\overset{E13}{=} rs(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)) \end{aligned}$$

q.e.d.

Korollar 15 (Formel von de Moivre). *Für $\varphi \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$$

Beweis. **Induktionsanfang:** n = 1, dann gilt:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^1 = \cos(1\cdot\varphi) + i\sin(1\cdot\varphi)$$

Induktionsvoraussetzung: Die Formel von de Moivre gelte für beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$

Induktionsschritt: Es gilt nun

$$\begin{aligned} (\cos\varphi + i\sin\varphi)^{n+1} &= (\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n \\ &\overset{\text{IV}}{=} (\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi) \\ &\overset{\text{K14}}{=} \cos(\varphi + n\varphi) + i\sin(\varphi + n\varphi) \\ &= \cos((n+1)\varphi) + i\sin((n+1)\varphi) \end{aligned}$$

q.e.d.

Satz 16. *Sei $n \in \mathbb{N}$, $a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Dann hat $z^n = a$ genau n Lösungen, gegeben durch*

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{k}{n}2\pi\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{k}{n}2\pi\right)\right)$$

für $k \in \{0, 1, \dots, n-1\} =: M$.

Beweis. Zunächst gilt für $k \in M$:

$$z_k^n \overset{\text{K15}}{=} r(\cos(\varphi + k2\pi) + i\sin(\varphi + k2\pi)) \overset{\text{E13}}{=} r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) = a$$

Also sind die z_k tatsächlich eine Lösung. Es verbleibt noch zu zeigen, dass es keine weiteren Lösungen gibt. Zunächst gilt, dass ein beliebiges Polynom vom Grad n höchstens n Nullstellen besitzt und $z^n - a$ ist ein Polynom vom Grad n. Es verbleibt also noch zu zeigen, dass die z_k paarweise verschieden sind.

Seien dafür $k, k' \in M$ s. d. $z_k = z_{k'}$. In diesem Fall muss bereits $\mathrm{Re}(z_k) = \mathrm{Re}(z_{k'})$ und $\mathrm{Im}(z_k) = \mathrm{Im}(z_{k'})$ gelten. Also haben wir

$$\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{k}{n}2\pi\right) = \cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{k'}{n}2\pi\right)$$
$$\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{k}{n}2\pi\right) = \sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{k'}{n}2\pi\right)$$

Es muss also ein $m \in \mathbb{Z}$ geben mit

$$\frac{\varphi}{n} + \frac{k}{n} = \frac{\varphi}{n} + \frac{k'}{n}2\pi + 2\pi \cdot m$$

Damit erhalten wir $k - k' = m \cdot n$ und da gilt $0 \leqslant k, k' < n$ muss bereits $k = k'$ gelten. *q.e.d.*

Bemerkung 17. Für $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ und damit folgt die Darstellung von $z = r(\cos\varphi + \sin\varphi) \in \mathbb{C}$

$$z = re^{i\varphi}$$

Satz 18 (Fundamentalsatz der Algebra). *Sei $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein nicht konstantes Polynom mit komplexen Koeffizienten, d. h. $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ mit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}, a_n \neq 0, n > 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Dann hat p Nullstellen $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, so dass gilt*

$$p(z) = (z - z_1) \cdot \ldots \cdot (z - z_n) \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

Insbesondere hat p keine andere Nullstellen.

Beweis. Siehe Funktionentheorie 1. *q.e.d.*