Gruppen

Aufgabe [5] Sei $(G, \star, e)$ eine Gruppe und $x \in G$. Dann definieren wir für $n \in \mathbb{Z}$

$$x^n := \begin{cases} x \star x \star \ldots \star x & \text{falls } n > 0 \\ e & \text{falls } n = 0 \\ x^{-1} \star x^{-1} \star \ldots \star x^{-1} & \text{falls } n < 0 \end{cases}$$

(a) Zeige die folgenden Rechenregeln:

(i) Für $k, l \in \mathbb{Z}$ gilt $x^k \star x^l = x^{k+l}$.

(ii) Für $k, l \in \mathbb{Z}$ gilt $x^k \star x^l = x^l \star x^k$.

(iii) Für $k \in \mathbb{Z}$ gilt $\left(x^k\right)^{-1} = x^{-k}$.

Beachte dabei, dass G nicht-notwendigerweise-kommutativ ist.

(b) Zeige

$$H := \{x^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

ist eine Untergruppe von G.

Universität Heidelberg
Vladislav Olkhovskiy
7. Oktober 2015

Gruppen

Übungsaufgaben

Aufgabe 1: Beweise:
Sei $(G, e, \circ)$ eine Gruppe und a,b beliebige Elemente von G. Dann gilt:

(a) $\exists!\ x \in G : a \circ x = b$

(b) $\exists!\ y \in G : y \circ a = b$

Aufgabe 2: Beweise oder widerlege folgende Aussagen:

(a) $a \circ a = a \circ b \Rightarrow a = b$

(b) $a \circ a = b \circ b \Rightarrow a = b$.

(c) $a^5 = a \Rightarrow a^4 = e$

(d) $a^5 = e$ und $a^4 = e \Rightarrow a = e$

(e) Gilt für jedes Element a einer Gruppe $(G, e, \circ)$, mit dem neutralen Element e und $a^2 = e$, so ist $(G, e, \circ)$ eine abelsche Gruppe.

(f) Gilt auch die Umkehrung der Aussage (e)?

Aufgabe 3: Begründe anhand der Schulkenntnisse, warum folgende Beispiele aus dem Gruppenvortrag tatsächlich Gruppen sind:

(a) $(\mathbb{Z}, 0, +)$

(b) $(\mathbb{Q} \backslash \{0\}, 1, \cdot)$

Aufgabe 4: Es sei M eine endliche Menge, $G = P(M)$, wobei $P(M)$ die Potenzmenge bezeichne. Unter welcher Bedingung für $\star$ ist $(G, \star, e)$ eine Gruppe? Begründe.

(a) $\star = \cap$

(b) $\star = \cup$

(c) $\star = \Delta$ (symmetrische Differenz, vgl. Mengenvortrag)

Die Verknüpfung $\star$ verhält sich wie folgt: $A \times B \to A \star B$, wobei die Elemente A, B Teilmengen der Menge M sind und anhand der üblichen Mengenoperationen (Durchschnitt, Vereinigung und symmetrische Differenz) ausgewertet werden können.

Aufgabe 5: Sei $(G, \star, e)$ eine Gruppe und H_1, H_2 zwei Untergruppen von G.

(a) Zeige, dass $H_1 \cap H_2$ auch eine Untergruppe von G ist.

(b) Gilt es auch, dass $H_1 \cup H_2$ eine Untergruppe von G ist?
Hinweis: Betrachte das Beispiel zu den Untergruppen aus dem Vortrag