Vorkurs-Vortrag
Wintersemester 2016/2017

Folgen und Grenzwerte

von
Sven Grützmacher

Dieser Vortrag wurde für den (von der Fachschaft organisierten) Vorkurs für die Studienanfänger an der Fakultät für Mathematik und Informatik der Universität Heidelberg erstellt.

Inhaltsverzeichnis

Folgen finden sich in der Mathematik immer wieder und gehören zum Grundwerkzeug eines jeden Mathematikers. Eben aus jenem Grund sollte man sich die Zeit nehmen sie zu verstehen.

Motivation

Wir werden uns in diesem Vortrag an einem kleinen sehr einfachen Bespiel entlang hangeln und und so Stück für Stück an das Themengebiet der Folgen heran wagen.

Wir werfen einen normalen W6 n mal. Wie hoch ist die Chance, dass wir mindestens eine 6 würfeln? Das ist meistens eine der ersten Standardaufgaben wenn man mit Wahrscheinlichkeitsrechnung beginnt. Im Kombinatorik-Vortrag habt ihr gesehen wie man schnell auf die ersten paar Werte kommen kann. Über den Vortrag hinweg sei $P(n) \in [0, 1]$ die Chance, dass wir mindestens eine 6 in n Würfen würfeln.

n	P
1	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{11}{36}$
3	$\frac{91}{216}$
$\vdots$	$\vdots$

Nun stellt man sich die Frage, ob man dieses Verhalten irgendwie mathematisch formulieren kann? -> JA!

Um das ganze etwas schöner zu haben schauen wir folgendes Problem an: „Wie hoch ist die Chance nie eine 6 würfeln? “Die liegt bei (nachdenken ;)) 5/6 pro Wurf, also bei n Würfen $(5/6)^n$. Damit kommen wir also zu folgendem kompaktem Ergebnis:

$$P(n) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

Was wir hier haben nennt der gebildete Mathematiker eine Folge (Definition kommt später). Wenn wir unser Beispiel betrachten sieht man auch schnell wofür sich Mathematiker oft bei der Betrachtung von Folgen interessieren: was passiert wenn n immer größer wird? Oder bei uns:

Was passiert mit unserer Chance, wenn wir immer öfter würfeln?

Intuitiv sieht man denke ich leicht, dass $(5/6)^n$ immer kleiner wird und unser $P(n)$ damit immer näher an die 1 ran rutscht. Genau dieses Verhalten werden wir in diesem Vortrag mathematisch formalisieren und untersuchen. Viel Spaß!

Der Betrag

Ich habe gesagt, dass $P(n)$ immer weiter an die 1 „rutscht “. Aber was genau bedeutet das? Im Grunde genommen sage ich hier, dass der Abstand bzw die Größe des Abstandes von $P(n)$ zur 1 immer kleiner wird. Wir müssen uns also erst klar machen, was wir under einem „Abstand“oder eine Länge/Größe verstehen. Die meisten werden dabei an den Betrag $|a|$ einer Zahl a denken. Genau dieses Konzept wollen wir uns anschauen.

Definition 1.1. Der Betrag auf $\mathbb{R}$ ist eine Abbildung $|\cdot| : \ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ wie folgt

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

Der Betrag ordnet einer Zahl anschaulich eine Länge zu. Man kann damit aber auch einfach den Abstand zwischen 2 Zahlen ausdrücken: $dist(x, y) = |x - y|$. Damit wir sinnvoll mit dieser Definition arbeiten können sollten wir ein paar Eigenschaften zeigen:

Satz 1.2. *Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

i) $x = 0 \Leftrightarrow |x| = 0$ *ii)* $x \leq |x|$ *iii)* $|xy| = |x||y|$ *iv)* $|x + y| \leq |x| + |y|$

Beweis. i) folgt direkt aus der Definition

ii) für $x \geq 0$ gilt $x = |x|$. Im anderen Fall folgt $x < 0 < -x = |x|$

iii) Für $x = 0 \vee y = 0$ ist die Aussage trivial. Seien also $x, y \neq 0$.

$x, y > 0$: damit ist auch $xy > 0$. Also: $|xy| = xy = |x||y|$

$x, y < 0$: auch hier ist $xy > 0$. Das heißt $|xy| = xy = (-x)(-y) = |x||y|$

$x < 0, y > 0$: hier ist $xy < 0$ und damit $|xy| = -xy = (-x)y = |x||y|$.

$x > 0, y < 0$: analog

iv) Da beide Seiten positiv sind ist quadrieren eine Äquivalenzumformung. Dann folgt mit ii)

$$|x + y| \leq |x| + |y| \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 \leq x^2 + 2|xy| + y^2 \Leftrightarrow 2xy \leq 2|xy|$$

$\square$

Folgen

Jetzt, da wir unser Handwerkszeug haben können wir uns den Folgen widmen und diese untersuchen.

Definition 2.1. Unter einer Folge $(a_n)_n$ in einer Menge U verstehen wir eine Abbildung

$$a : \ \mathbb{N} \longrightarrow U; \ n \longmapsto a_n$$

a_n heißt dabei das n-te Folgenglied der Folge.

Mit dieser Definition können wir unsere Folge $P(n)$ auch formal ausdrücken:
sei $U = [0,1] \subset \mathbb{R}$. Dann erhalten wir

$$P : \mathbb{N} \longrightarrow [0,1];\ n \longmapsto P(n) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

Beispiel 2.2.

$$a_n = \frac{1}{n} \qquad\qquad b_n = \cos(n\pi)$$

Axiom Jetzt haben wir unser Problem schon fast formalisiert. Fehlt noch die Sache „$P(n)$ rutscht immer weiter auf die 1“. Das heißt ja im Grunde genommen nichts anderes als dass der Abstand von $P(n)$ zur 1 immer kleiner...sogar beliebig klein wird. Das motiviert folgende Definition:

Definition 2.3. Sei $(a_n)_n$ eine Folge. Wir sagen die Folge konvergiert genau dann wenn

$$\exists a \in \mathbb{R} :\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} :\ \forall n > N :\ |a_n - a| < \varepsilon$$

Andernfalls heißt die Folge divergent. Im Falle der Existenz nennen wir a den Grenzwert der Folge und schreiben auch $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n = a$.

Wenn eine Folge konvergiert liegen also fast alle meine Folgenglieder irgendwann nahe genug an diesem Grenzwert.

Um dies ausrechnen zu können brauchen wir ein sehr intuitives, aber auch extrem wichtiges Resultat:

Proposition 2.4 (Archimedische Eigenschaft)**.** *Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $y > x > 0$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $nx > y$.*

Beweis. Ohne. Wäre zu viel hier. □

Direkt daraus erhalten wir

Korollar 2.5. *Es gilt:* $\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N} :\ \frac{1}{n} < \varepsilon$.

Beweis. Für $\varepsilon \geq 1$ setzen wir $n = 2$.

Für $\varepsilon < 1$ setzen wir $x = \varepsilon$ und $y = 1$. Aus der archimedischen Eigenschaft erhalten wir ein $n \in \mathbb{N}$ so dass

$$n\varepsilon > 1 \Leftrightarrow \varepsilon > \frac{1}{n}$$

□

Für unser Würfel-Beispiel brauchen wir eine weitere Folgerung daraus. Den Beweis lassen wir hier weg, da das nötige Wissen dafür den Umfang des Vortrages sprengen würde:

Proposition 2.6. *Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq x < 1$. Dann gilt:* $\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N} :\ x^n < \varepsilon$

Zurück zu unserem Würfel. Wir wollen also eigentlich zeigen, dass $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} P(n) = 1$ gilt. Das könne wir jetzt einfach nachrechnen!

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen N groß genug, so dass $(5/6)^N < \varepsilon$.

Dann gilt

$$|P(n) - 1| = \left|1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n - 1\right| = \left|\frac{5^n}{6^n}\right|$$

Damit bekommen wir:

$$|P(n) - 1| = \left|\frac{5^n}{6^n}\right| = \left|\frac{5}{6}\right|^n < \left|\frac{5}{6}\right|^N < \varepsilon$$

das letzte gilt dabei wohlgemerkt nur für $n > N$. □

Das heißt ja jetzt nicht anderes als: je öfter wir würfeln desto höher ist die Chance mindestens eine 6 zu würfeln!

weitere einfache Beispiele sind:

Beispiel 2.7.

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{2n^3 + n^2 - 5n}{n^3 - 20n} = 2 \qquad e_n = \cos(n\pi) \qquad f_n = 5^n$$

Somit konvergieren die ersten beiden, wohin gegen die letzten beiden divergieren, denn die vorletzte wackelt immer zwischen -1 und 1 und die letzte wird einfach immer größer.

Mathematiker achten immer darauf, dass ihre Definitionen sinnvoll sind. Wir fragen uns also ob es passieren kann, dass eine Folge 2 Grenzwerte hat? Zum Glück nicht!

Satz 2.8. *Sei $(a_n)_n$ eine konvergente Folge und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a = \lim_{n\longrightarrow\infty} a_n$ und $b = \lim_{n\longrightarrow\infty} a_n$. Dann gilt $a = b$.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Da die Folge konvergiert existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so dass $\forall n > N$ gilt:

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad |b_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Damit folgt dann

$$|a - b| = |a - b + a_n - a_n| \leq |a - a_n| + |a_n - b| = |a_n - a| + |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Da ε beliebig war folgt $|a - b| = 0$ und damit $a = b$. □

Bemerkung 2.9. *Es gibt auch Räume die, mit der richtigen Struktur versehen, es erlauben, dass eine Folge 2 Grenzwerte hat. Das werdet ihr vielleicht irgendwann kennen lernen.*

Jetzt können wir uns noch fragen: wie sind wir eigentlich daraus gekommen, dass $P(n)$ auf die 1 läuft? Die naheliegenste Idee ist doch, dass der Bruch hinten immer kleiner wird, also gegen 0 konvergiert und damit diese Differenz verschwindet. Um diese Idee zu untermauern schauen wir uns einmal an wie man mit Folgen rechnet und ob wir diese Intuition auch formal beweisen können.

Definition 2.10. Seien $(a_n)_n, (b_n)_n$ Folgen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

1. $(a_n)_n + (b_n)_n = (a_n + b_n)_n$ und $\lambda(a_n)_n = (\lambda a_n)_n$
2. $(a_n)_n$ heißt beschränkt $\Leftrightarrow$ $\exists C \in \mathbb{R}: \ |a_n| \leq C \ \forall n \in \mathbb{N}$

Folgen werden also Komponentenweise addiert und mit Skalaren multipliziert.

Wenn wir das jetzt wissen können wir unsere Folge ja ein bisschen aufteilen:

$$P(n) = K(n) - L(n);\; K(n) = 1,\; L(n) = \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

Wenn wir unsere Intuition jetzt mal formalisieren haben wir ja so etwas gemacht:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P(n) = \lim_{n \longrightarrow \infty} (K(n) - L(n)) = \lim_{n \longrightarrow \infty} K(n) - \lim_{n \longrightarrow \infty} L(n) = 1 - 0 = 1$$

Wieso klappt dieser Schritt? Wann darf ich denn Grenzwerte auseinander ziehen?

Satz 2.11. *Seien $(a_n)_n, (b_n)_n$ konvergente Folgen mit $a = \lim_{n \longrightarrow \infty} a_n$ und $b = \lim_{n \longrightarrow \infty} b_n$. Dann gilt:*

1. $\lim_{n \longrightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$
2. $\lim_{n \longrightarrow \infty} (\lambda a_n) = \lambda a$ *für* $\lambda \in \mathbb{R}$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so dass $\forall n > N$ $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ gilt.

1. hier gilt dann:

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

2. hier reicht es $\lambda \neq 0$ zu betrachten. Für $\lambda = 0$ ist der Beweis trivial.
   Wir beachten hier: aus der Konvegenz folgt: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} :\ \forall n > N : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$, denn $\varepsilon/|\lambda| > 0$. Damit gilt dann:

$$|\lambda a_n - \lambda a| = |\lambda(a_n - a)| = |\lambda|\, |a_n - a| < |\lambda| \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon$$

$\square$

Bemerkung 2.12. *Das auch für Produkte:* $(a_n)_n \dot{(} b_n)_n \longrightarrow a \cdot b$

Wichtig ist hierbei dass wirklich beide Folgen konvergieren. Folgende Beispiele zeigen wieso:

Beispiel 2.13. Sei $(a_n)_n$ eine Folge mit $a_n = 0 = n - n$. Dann gilt nicht:

$$0 = \lim_{n \longrightarrow \infty} 0 = \lim_{n \longrightarrow \infty} a_n = \lim_{n \longrightarrow \infty} (n - n) = \lim_{n \longrightarrow \infty} n - \lim_{n \longrightarrow \infty} n$$

Die Folge $n \mapsto n$ divergiert. Insbesondere können wir hier nicht von einem Grenzwert sprechen. $\lim_{n \longrightarrow \infty} n$ ist daher undefiniert und insbesondere NICHT Null!

Beispiel 2.14. Sei $(a_n)_n$ eine Folge mit $a_n = 1 = n/n$. Dann gilt nicht:

$$1 = \lim_{n \longrightarrow \infty} 1 = \lim_{n \longrightarrow \infty} a_n = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{n}{n} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{n} - \lim_{n \longrightarrow \infty} n = 0 \cdot \infty$$

Hier gilt die selbe Argumentation wie oben. Der Ausdruck $0 \cdot \infty$ ist nicht definiert.

Mit diesem Wissen haben wir uns jetzt ein kleines Grundwissen zum Thema Folgen erarbeitet. Diese Basics lassen sich natürlich noch stark erweitern...aber dafür seid ihr ja jetzt an der Uni!