Aufgaben

Das hier sind die Übungsaufgaben zum Folgen-Vortrag im Vorkurs WS 2016.
Beachtet, dass diese Beweise hier im Grunde alle auf dem **archimedischen Axiom** aufbauen, dass ich nicht bewiesen habe. Die Aussage ist allerdings klar.

Proposition 1 (Archimedis)**.** *Für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $y > x > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $xn > y$.*

Beziehungsweise benutzen wir eher diese Variante:

Korollar 1.1. *Für $\varepsilon > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ so dass $\frac{1}{n} < \varepsilon$.*

Einführung - Basics

Aufgabe 1. Zeigt, ob folgende Folgen konvergieren und bestimmt gegebenenfalls den Grenzwert

a) $a_n = \frac{2}{n}$

b) $b_n = (-1)^n$

c) $c_n = n^2$

d) $d_n = 3 + \frac{1}{n}$

Aufgabe 2. Zeigt, dass konvergente Folgen beschränkt sind.
(eine Folge heißt beschränkt, falls ein $C > 0$ existiert mit $|a_n| < C \ \forall n \in \mathbb{N}$)

Next step - einfache Aufgaben

Aufgabe 3. Zeigt, ob folgende Folgen konvergieren und bestimmt gegebenenfalls den Grenzwert

a) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

b) $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3$

c) $c_n = \frac{n^2}{2n+3n^2}$

Aufgabe 4. Zeigt: für jede konvergente Folge $a : \mathbb{N} \longrightarrow \{1, \ldots, 10\}$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n = a_N \ \forall n \geq N$.

Next step - weitere Aufgaben

Aufgabe 5. Zeigt, ob folgende Folgen konvergieren und bestimmt gegebenenfalls den Grenzwert

$$a_n = \frac{2+n}{n^2} - n \qquad\qquad b_n = \frac{(-1)^n}{3^n + (-2)^n}$$

Aufgabe 6. Beweist die umgekehrte Dreiecks-Ungleichung

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

am Ende - nicht so einfache Aufgaben

Aufgabe 7. Wir betrachten folgende Folge

$$n \mapsto \sum_{k=0}^{n} q^k$$

a) gebt die ersten Paar Folgenglieder für $q \in \{1/2, 1, 2\}$ an

b) für welche $q \in \mathbb{R}$ konvergiert die Folge?

Hinweis: zeigt: $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

c) Was ist der Grenzwert im Falle der Kovergenz?

Aufgabe 8 (Bernoulli)**.** a) Zeige die Bernoulli'sche Ungleichung: Sei $x > -1$, dann

$$(1+x)^n \geq 1 + nx; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

b) Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$. Dann gilt $|q|^n \longrightarrow 0$.

Aufgabe 9 (goldener Schnitt)**.** Der goldene Schnitt: betrachtet man die sogenannte Fibonacci-Folge

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

Eine interessante Feststellung ist, dass das Verhältnis 2er aufeinander folgender Zahlen gegen einen festen Wert konvergiert. Diesen nennt man den goldenen Schnitt

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Interessant ist, dass das für viele verschiedene Folgen gilt. Zeigt also:

Sei $(a_n)_n$ eine Folge mit der Eigenschaft, dass $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$ beliebig sind und

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

Dann gilt für die Folge $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$: $b_n \longrightarrow \Phi$.
Ihr dürft annehmen, dass $(b_n)_n$ konvergiert (ihr könnt es auch zeigen wenn ihr wollt).

Bemerkung 1.2. *Überlegt euch wieso ihr folgenden Ansatz wählen könnt:*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n-1}} + \delta$$