Ruprecht-Karls Universität Heidelberg — Übungsbetrieb
Fachschaft MathPhys
Vorkurs

Aufgabenvorschläge

Anmerkung:
Bereits bewiesene Sätze (auch aus den Vorträgen) dürfen benutzt werden. Bitte rechnet die Aufgaben mit einer entsprechenden Anmerkung vor. Solange hier keine besondere Anmerkung steht, ist es Euch überlassen, was und wie ihr rechnen lasst. Ihr solltet die Aufgaben aber vorher einmal selbst gerechnet haben.

Beweise mit Hilfe des direkten Beweisverfahrens:
Aufgaben 8 (und 9) sollten erst am zweiten Tag besprochen werden!

1. Sei $n \in \mathbb{Z}$, dann ist n gerade oder $n+1$ ist gerade. (Es darf verwendet werden: Eine ganze Zahl ist entweder gerade oder ungerade.)
2. Die Summe zweier gerader ganzer Zahlen ist gerade. *(vorrechnen)*
3. Sei k eine ganze Zahl. Die Summe zweier durch k teilbaren Zahlen ist wieder durch k teilbar.
4. Das Produkt zweier ungerader ganzer Zahlen ist ungerade.
5. Die Summe dreier aufeinander folgender ganzer Zahlen ist durch 3 teilbar.
6. Ist $p \in \mathbb{N}, p > 2$ eine Primzahl, so hat sie die Gestalt $p = 4k \pm 1$. (Es darf verwendet werden: Eine ganze Zahl ist von der Form $4k, 4k+1, 4k+2$ oder $4k+3$ für eine geeignete ganze Zahl k.) *(vorrechnen)*
7. Ist $p \in \mathbb{N}, p > 3$ eine Primzahl, so hat sie die Gestalt $p = 6k \pm 1$. (Es darf verwendet werden: Eine ganze Zahl ist von der Form $6k \pm a$ mit geeignete Zahlen a und k, wobei $0 \leq a \leq 3$.)
8. Ist n eine natürliche Zahl, dann ist $(2n+1)^2 - 1$ durch 4 teilbar. *(vorrechnen)*
9. Ist n eine natürliche Zahl, dann ist $(2n+1)^2 - 1$ durch 8 teilbar. (Tipp: Denke an Aufgabe 1)

Gegenbeispiel
Man zeige, dass folgende Aussagen *falsch* sind:

1. Jede natürliche Zahl größer 1 ist eine Primzahl.
2. Jede Primzahl größer 2 ist von der Form $6k \pm 1$. *(vorrechnen)*
3. Jede vollkommene Zahl ist eine Quadratzahl, d.h. von der Form n^2. *(vorrechnen)*
4. Die Summe der ersten n Quadratzahlen $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ ist von der Form

$$n(n+1)(n+2)(n+3)/24.$$

Beweise mit Hilfe des indirekten Beweisverfahrens:

1. Sei a eine ganze Zahl. Ist a^2 ungerade, so ist auch a ungerade.
2. Wenn die letzte Ziffer einer Zahl eine 3 ist, dann ist sie keine Quadratzahl. *(vorrechnen)*
3. Wenn die letzte Ziffer einer Zahl n eine 8 ist, dann gibt es keine ganze Zahl m mit $m^4 = n$.

Widerspruchsbeweise

1. $\sqrt{3}$ ist irrational *(vorrechnen)* (Es darf verwendet werden: Eine ganze Zahl ist von der Form $3k$ oder $3k \pm 1$ für ein geeignetes k.)
2. Für p eine beliebige Primzahl ist $\sqrt{p}$ irrational. (Eine eindeutige Primfaktorzerlegung darf angenommen werden)

Für Leute, die noch mehr Beschäftigung brauchen: Zeige, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.