Der Relationenbegriff: Partitionen und Abbildungen

Ein Vortrag im Rahmen
des mathematischen Vorkurses der
Fachschaft MathPhys
von
Fabian Grünig

Fragen, Anmerkungen und Korrekturen an

fabian@mathphys.fsk.uni-heidelberg.de

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dieser Vortrag entstand im Rahmen des mathematischen Vorkurses der Fachschaft MathPhys an der Universität Heidelberg und wurde zum ersten Mal im Wintersemester 2012/13 gehalten. Da dieser Vortrag, wie der gesamte Vorkurs, stets weiterentwickelt und verbessert wird, bitte ich ausdrücklich darum, mir Fragen, Anmerkungen und Korrekturen zukommen[1] zu lassen.

Notation

Wir bezeichnen die Menge der natürlichen Zahlen mit $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ und meinen mit $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ die Menge der natürlichen Zahlen zusammen mit der Null. Ferner bezeichnen wir mit $\mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen, mit $\mathbb{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen und mit $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen. Wir werden diese Zahlenmengen nicht rigoros definieren, sondern vertrauen auf das intuitive Verständnis des Lesers oder der Leserin.

[1] Am besten per Mail an: fabian@mathphys.fsk.uni-heidelberg.de

1 Naive Mengenlehre

Wir verwenden in diesem Vortrag eine naive Mengenlehre und wiederholen einige Grundlagen. Wer sich für die Probleme des naiven Mengenbegriffs interessiert oder diese gar fürchtet, den verweise ich auf den Vortrag „Mengen, natürlich Zahlen, Induktion“[2] von Tim Adler im Vorkurs zum Wintersemester 2013/14. In der praktischen Anwendung auf dem Niveau dieses Vortrags unterscheiden sich diese Mengenbegriffe nicht.

Definition (Georg Cantor, 1895) *„Unter einer* Menge *verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die* Elemente *von M genannt werden) zu einem Ganzen.“*

Wir bezeichnen Mengen typischerweise mit großen lateinischen Buchstaben A, B, M, X, Y. Sprechen wir von Elementen einer Menge, so bezeichnen wir diese mit kleinen lateinischen Buchstaben a, b, m, x, y. Ist m ein Element von M, so schreiben wir

$$m \in M.$$

Ist m kein Element von M, so schreiben wir

$$m \notin M.$$

Wir nennen die Menge, welche keine Elemente enthält, die *leere Menge* und bezeichnen diese mit $\emptyset$.

Definition *Seien X, Y Mengen, dann nennen wir X eine* Teilmenge *von Y, falls für alle Elemente $x \in X$ auch $x \in Y$ gilt. Gegebenenfalls schreiben wir*

$$X \subseteq Y$$

Existiert in diesem Fall ein Element $y \in Y$, welches nicht in X enthalten ist ($y \notin X$), so nennen wir X eine echte Teilmenge *und schreiben*

$$X \subsetneq Y.$$

Definition *Seien X, Y Mengen. Wir nennen X, Y* gleich *oder* identisch *und schreiben*

$$X = Y,$$

falls sowohl $X \subseteq Y$, als auch $Y \subseteq X$ gilt.

Beispiel Wir definieren Mengen (und damit ihre Elemente) auf verschiedene Weisen.

[2] johannes.uni-hd.de/vorkurs/2013/skripte/mengen/mengen.pdf

(i) *Explizite Angabe oder Aufzählung der Elemente*
Geben wir alle Elemente einer Menge explizit an, so verwenden wir geschwungene Klammern und trennen die Elemente durch Kommata ab.

$$\{1,2,3\} \text{ oder } \{\text{Alice}, \text{Bob}\}.$$

Dabei beachten wir weder die Reihenfolge der Angabe noch die Doppelnennung etwaiger Elemente. Es gilt etwa

$$\{1,2,3\} = \{1,3,2\} = \{3,2,1,1\}.$$

Besitzt eine Menge nicht endlich viele (oder sehr viele) Elemente, können (oder wollen) wir ihre Elemente nicht aufzählen In diesen Fällen behelfen wir uns mit anderen Möglichkeiten. Ist die Fortsetzung der Angabe klar, so können wir Fortsetzungspunkte verwenden.

$$\{1,2,3,4,\dots\} \text{ oder } \{a,b,c,\dots,A,B,C,\dots\}$$

(ii) *Angabe durch definierende Eigenschaften*
Charakerisieren wir eine Menge durch eine gemeinsame Eigenschaft E ihrer Elemente, so schreiben wir

$$\{x \mid E(x)\}.$$

Verwenden wir für diese Charakterisierung mehrere Eigenschaften $E_1, E_2, E_3, \dots$, so können wir diese mittels logischen Operatoren verknüpfen.

$$\{x \mid E_1(x) \land E_2(x) \land E_3(x) \land \dots\}$$
$$\{x \mid E_1(x) \lor E_2(x) \lor E_3(x) \lor \dots\}$$

Wollen wir etwa alle natürlichen Zahlen, die gerade sind, zu einer Menge zusammenfassen, so formulieren wir dies durch

$$\{x \mid x \in \mathbb{N} \land (x \text{ ist gerade.})\}.$$

Wollen wir über ein (unbestimmtes) Element einer Menge reden, so verwenden wir *Elementvariablen*. Es kann $x \in \{\text{Alice}, \text{Bob}\}$ für Alice oder Bob stehen, ist aber innerhalb dieser Menge unbestimmt. Alice ist eine *Elementkonstante* von $\{\text{Alice}, \text{Bob}\}$, also bestimmt.

Definition *Sei X eine Menge. Dann nennen wir die Menge aller Teilmengen von X die*

Potenzmenge von X *und bezeichnen diese mit*

$$\mathrm{Pot}(X) := \{Y \mid Y \subseteq X\}.$$

Beispiel Sei $X := \{1,2,3\}$. Dann ist

$$\mathrm{Pot}(X) = \Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\Big\}.$$

Definition *Seien X, Y Mengen, dann nennen wir die Menge aller (geordneten) Paare von Elementen von X und Y das* kartesische Produkt *und schreiben*

$$X \times Y := \{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Beispiel Seien $X := \{1,2,3\}$ und $Y := \{\text{Alice}, \text{Bob}\}$. Dann ist

$$\begin{aligned} X \times Y = \Big\{&(1,\text{Alice}), (2,\text{Alice}), (3,\text{Alice}),\\ &(1,\text{Bob}), (2,\text{Bob}), (3,\text{Bob})\Big\} \end{aligned}$$

Definition *Seien X, Y und $X_1, X_2, X_3, \ldots$ Mengen. Wir definieren*

$$X \cup Y := \{z \mid z \in X \text{ oder } z \in Y\}$$

als die Vereinigung von X und Y *und*

$$X \cap Y := \{z \mid z \in X \text{ und } z \in Y\}$$

als den Schnitt von X und Y. *Ausserdem schreiben wir*

$$\bigcup_i X_i \text{ bzw. } \bigcap_i X_i$$

für die Vereinigung bzw. den Schnitt aller Mengen $X_1, X_2, X_3, \ldots$.[3]

[3] Diese Notation ist nur dann wohldefiniert, falls $\cup$ bzw. $\cap$ assoziativ und kommutativ sind. Der Nachweis dieser Eigenschaften ist eine lohnende Übungsaufgabe.

2 Partitionen und Äquivalenzrelationen

2.1 Partitionen – „Wohngemeinschaften und die GEZ“

Wir blicken zurück auf den Beginn des Wintersemesters 2012/13. Viele Studienanfänger*innen lauschen gespannt dem mathematischen Vorkurs, lernen sich und die Stadt kennen und ziehen vielleicht in Wohngemeinschaft zusammen. Ein paar Tage nach dem Einzug erhalten sie auf einmal Post von der Gebühreneinzugszentrale der öffentlich-rechtlichen Rundfunkanstalten (kurz GEZ). Seit langer Zeit verlangte sie von jedem Menschen in Deutschland Rundfunkgebühren. Das Gebührenmodell betrachtet dazu die Menge

$$D := \{x \mid x \text{ ist Mensch in Deutschland}\}$$

Seit dem Jahr 2012 sieht die Welt aber anders aus. Die GEZ heißt jetzt ARD ZDF Deutschlandradio Beitragsservice, die Rundfunkgebühren heißen Rundfunkbeiträge, und das Gebührenmodell sieht eine Haushaltspauschale vor. Wir betrachten also

$$H := \{h \mid h \text{ ist ein Haushalt in Deutschland}\}$$

Die Haushalte h enthalten Menschen aus Deutschland[4]. Wir können nur spekulieren, was sich die Zuständigen dabei gedacht haben, aber vermutlich hatten sie folgende Hoffnungen

- Der Verwaltungsaufwand wird kleiner. „H ist kleiner als D“.
- Jeder Mensch ist Mitglied in einem Haushalt. Alle werden erfasst.
- Niemand ist Mitglied in zwei Haushalten. Keiner muss doppelt zahlen.

Die GEZ hofft also, dass H eine *Partition* von D ist. Dieses Begriff können wir auf mathematische Weise formulieren.

Definition [2.1] *Sei X eine Menge und $P := \{P_1, P_2, P_3, \ldots\} \subseteq \mathrm{Pot}(M)$ eine Menge von nichtleeren Teilmengen von X. Wir nennen P eine* Partition von X, *falls*

$$X = \bigcup_i P_i$$

und für alle $P_i, P_j \in P$ genau eine der folgenden Aussagen wahr ist:

(i) $P_i = P_j$

(ii) $P_i \cap P_j = \emptyset$

[4] Die Haushalte h können also als Mengen interpretiert werden, auch wenn wir hier kleine Buchstaben verwenden.

2.2 Äquivalenzrelationen

Die Denkweise des Gebührenmodells der GEZ entspricht nicht unserem Denkmuster im Alltag. Wir nehmen unser Leben in Wohngemeinschaften selten als eine Partition aller Menschen wahr und denken wesentlich lokaler. Für uns ist das Zusammenwohnen eher eine *Beziehung* von einem Menschen zu einem anderen. Fragen wir Alice, wo Bob denn wohnt, hören wir „Bob? Mit dem wohne ich zusammen.“ und nicht „Bob und ich sind im selben Haushalt.“

Welche (intuitiven) Anforderungen stellen wir an eine solche Beziehung?

- Alice wohnt zusammen mit Alice. Klingt komisch, ist aber so.
- Alice wohnt zusammen mit Bob. Also wohnt Bob auch zusammen mit Alice.
- Alice wohnt zusammen mit Bob. Bob wohnt zusammen mit mit Charlie. Also wohnt Alice auch zusammen mit Charlie.

Definition [2.2] *Sei X eine Menge und $R \subseteq X \times X$. Dann nennen wir R eine* Relation *auf X. Ist $(x,y) \in R$, so schreiben wir auch*

$$x \sim_R y$$

und sagen x steht in Relation R zu y.

Für den Relationenbegriff kodieren wir die Elemente, die in Beziehung stehen sollen in einem Paar, also ein Element des kartesischen Produkts. Beziehungen, die die obigen gewünschten Eigenschften besitzen, nennen wir Äquivalenzrelationen.

Definition [2.3] *Sei X eine Menge und R eine Relation auf X. Dann nennen wir R eine* Äquivalenzrelation, *falls für alle $x,y,z \in R$ folgendes gilt*

(i) $(x,x) \in R$. *(Reflexivität)*

(ii) *Aus $(x,y) \in R$ folgt $(y,x) \in R$.* *(Symmetrie)*

(iii) *Aus $(x,y),(y,z) \in R$ folgt $(x,z) \in R$.* *(Transitivität)*

Im Folgenden schreiben wir kurz $x \sim y$, falls keine Verwechslungsgefahr mit anderen Relationen besteht. Ausserdem bezeichnen wir die Relation R kurz mit $\sim$.

Wir wollen nun untersuchen, ob die beiden Denkweisen der Gebührenzentrale und der WG-Bewohner*innen äquivalent sind oder nicht. Dazu arbeiten wir mit den mathematischen Begriffen der Partition und der Äquivalenzrelation. Wir betrachten zunächst die Menge der Bewohner*innen einer WG, also die Menge aller Menschen, die zu einem bestimmten Menschen in der „... wohnt zusammen mit... “-Relation stehen. Diese Mengen nennen wir Äquivalenzklassen.

Definition [2.4] *Sei X eine Menge, $R \subseteq X \times X$ eine Äquivalenzrelation und $x \in X$ ein Element in X. Dann nennen wir*

$$[x] := \{y \in X \mid y \sim_R x\}$$

die Äquivalenzklasse von x. *Sie besteht aus allen Elementen, die mit x in Beziehung stehen.*

In unserem Beispiel der „...wohnt zusammen mit...“-Relation ist [Bob] die Menge aller Mitbewohner von Bob (und auch Bob). Diese Menge ist aber identisch mit [Alice], da Alice und Bob natürlich die selben Mitbewohner haben. Die Auswahl des Menschen, die die Vertreter*in der WG ist, ist beliebig und ändert nichts an der WG.

Bemerkung [2.5] *Sei X eine Menge, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X und $x \in X$. Dann gilt für alle $y \in [x]$:*

$$[x] = [y].$$

Beweis: Sei $y \in [x]$, das heißt $y \sim x$. Da $\sim$ symmetrisch ist, gilt auch $x \sim y$. Wir zeigen die Gleichheit von Mengen:

„$\subseteq$“ Sei $z \in [x]$, also $z \sim x$. Wegen der Transitivität von $\sim$ gilt dann $z \sim y$. Also $z \in [y]$.

„$\supseteq$“ Sei $z \in [y]$, also $z \sim y$. Wir nutzen wieder die Transitivität von $\sim$ und erhalten $z \sim x$, also $z \in [x]$.

Also gilt $[x] \subseteq [y]$ und $[x] \supseteq [y]$ und somit $[x] = [y]$.

□

Die Äquivalenzklassen von Elementen, die in Relation stehen sind demnach bereits gleich. Wir klären nun, wie sich Äquivalenzklassen von Elementen verhalten, die *nicht* in Relation stehen.

Bemerkung [2.6] *Seien X eine Menge, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X und $x, y \in X$. Dann gilt genau eine der folgenden Aussagen:*

(i) $[x] = [y]$

(ii) $[x] \cap [y] = \emptyset$

Beweis: Wir unterscheiden die Fälle $x \in [y]$ und $x \notin [y]$.

($x \in [y]$) Gelte $x \in [y]$, dann folgt wegen Bemerkung [2.5] bereits $[x] = [y]$. Die erste Aussage ist also wahr. Außerdem gilt $x \in [x] \cap [y] \neq \emptyset$, wonach die zweite Aussage falsch ist.

($x \notin [y]$) Gelte $x \notin [y]$, also insbesondere $[x] \neq [y]$. Angenommen es existiert ein $z \in [x] \cap [y]$, also $z \sim x$ und $z \sim y$. Da $\sim$ symmetrisch ist, folgt $x \sim z$ und wegen der Transitivität von $\sim$ auch $x \sim y$. Dann gilt aber $x \in [y]$, ein Widerspruch. Die Annahme war falsch und es gilt $[x] \cap [y] \neq \emptyset$.

□

Definition [2.7] *Sei X eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Dann bezeichnen wir mit*

$$X/_{\sim} := \Big\{[x] \mid x \in X\Big\}$$

die Menge der Äquivalenzklassen von X bzgl. $\sim$.

Die Menge $X/_{\sim}$ ist in unserem Beispiel die Menge aller WGs in Deutschland. Diese Menge bildet eine Partition aller Menschen in Deutschland und zwar genau die Partition, die der Denkweise der Gebührenzentrale entspricht.

Satz [2.8] *Sei X eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Dann ist $X/_{\sim}$ eine Partition von M.*

Beweis: Seien $[x_1], [x_2], [x_3], \ldots$ die verschiedenen Äquivalenzklassen bezüglich der Äquivalenzrelation $\sim$. Wir müssen zeigen

(i) $X = \bigcup_i [x_i]$

(ii) Für alle $x, y \in X$ mit $[x] \neq [y]$ gilt $[x] \cap [y] = \emptyset$.

Die zweite Aussage (ii) folgt direkt aus Bemerkung [2.6]. Wir zeigen noch (i) und müssen die Gleichheit dieser Mengen nachweisen. Sei $x \in X$, dann ist sicher $x \in [x]$. Die Äquivalenzklasse $[x]$ stimmt wegen Bemerkung [2.6] mit einer der Äquivalenzklassen $[x_j]$ überein. Damit ist

$$x \in [x_j] \subseteq \bigcup_i [x_i].$$

Ausserdem ist klar, dass $\bigcup_i [x_i] \subseteq X$, da $[x_i] \subseteq X$.

□

Satz [2.9] *Sei X eine Menge und $P \subseteq \mathrm{Pot}(X)$ eine Partition von X, dann existiert eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf X, sodass*

$$X/_{\sim} = P.$$

Beweis: Diesen Beweis überlassen wir als Übungsaufgabe. □

3 Abbildungen

Im letzten Kapitel haben wir den Begriff der *Relation* eingeführt, sind aber schnell zum Studium der spezielleren Äquivalenzrelationen übergegangen. Wir wollen uns in diesem Kapitel mit Abbildungen (oder Funktionen) beschäftigen. Um diese jedoch mathematisch korrekt formulieren zu können, brauchen wir einen allgemeineren Begriff der *Relation*, denn eine Abbildung setzt Elemente *verschiedener* Mengen in Beziehung. Die Äquivalenzrelationen aus dem vorherigen Kapitel waren begrifflich nur in der Lage, Elemente aus *ein und derselben* Menge in Beziehung zu setzen.

Definition [3.1] *Seien X, Y Mengen und $R \subseteq X \times Y$. Dann nennen wir R eine* Relation zwischen X und Y.

Auch hier schreiben wir für $(x, y) \in R$ einfach $x \sim y$, falls keine Verwechlungsgefahr besteht. Inbesondere sprechen wir nun von allgemeinen Relationen und nicht von Äquivalenzrelationen. Die hier betrachteten Relationen müssen nicht länger reflexiv, symmetrisch oder transitiv sein; sie können diese Eigenschaften meist garnicht besitzen.

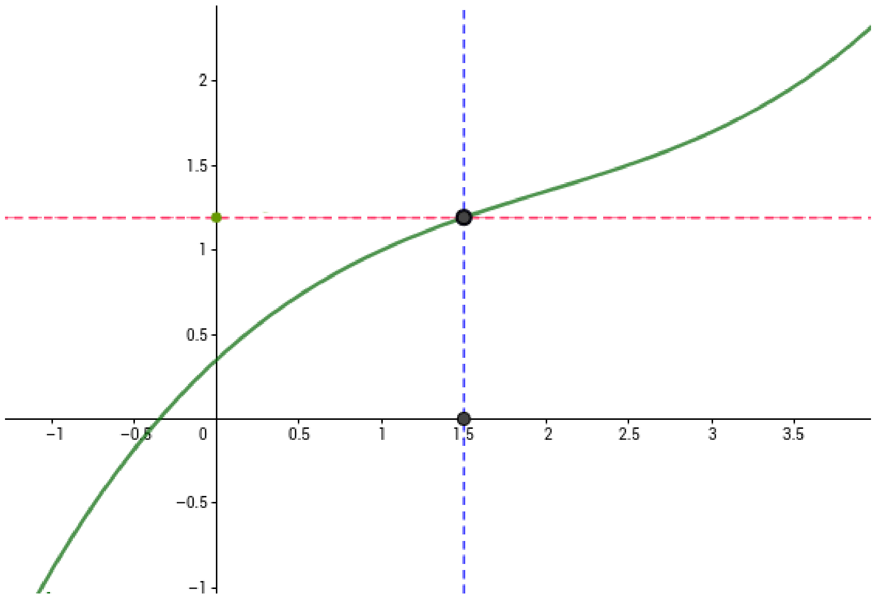
Wir werden uns in diesem Kapitel dem Abbildungsbegriff der Hochschulmathematik nähern. Diese Näherung erfolgt in drei Schritten. Im ersten Schritt werden wir Abbildungen mit Blick auf ihren *Zuordnungscharakter* betrachten. Dazu werden wir den bekannten Funktionenbegriff aus der Schulmathematik aufgreifen und in eine mengentheoretisch saubere Formulierung überführen. Außerdem erwähnen wir kurz zwei wichtige Spezialfälle von Zuordnungen. Im zweiten Schritt fokussieren wir das Änderungsverhalten bzw. den *Kovariationsaspekt* von Abbildungen. Im Sinne eines Ausblicks auf die zentralen Begriffe der Grundvorlesungen „Analysis 1“ und „Lineare Algebra 1“ werden wir *Stetigkeit* und *Linearität* als Kovariationseigenschaft von Abbildungen motivieren. Im letzten Schritt betrachten wir Abbildungen als eigenständige mathematische Objekte.

3.1 Abbildungen als Zuordnungsrelationen

Aus der Schule kennen wir (so oder so ähnlich) den folgenden Begriff einer Abbildung.

Definition *Eine* Abbildung f *ist eine Zuordnungsvorschrift, die jedem Element x genau ein Element y zuordnet.*

Schrecklich, nicht wahr? Was meinen wir mit *zuordnen*, was soll denn eine *Zuordnungsvorschrift* sein; was sind x und y? Diese Definition ist total schwammig. Zum Glück können wir bereits mit unseren Mitteln einen exakten Abbildungsbegriff definieren. Als Motivation dafür dient der aus der Schulmathematik bekannte *Funktionsgraph*.



In diesem Sinne ordnet eine Abbildung einem Element x der horizontalen Achse genau dann ein Element y der vertikalen Achse zu, falls der Punkt (x, y) auf dem Funktionsgraphen liegt. Interpretieren wir (x, y) nun nicht länger als geometrischen Punkt, sondern als Paar von Elementen, so nähern wir uns einer Definitionsmöglichkeit von Abbildungen – ausgehend von dem Relationenbegriff. Im abstrakten Setting werden wir in der Hochschulmathematik nicht nur Abbildungen zwischen den reellen Zahlen studieren, sondern allgemein Abbildungen zwischen beliebigen Mengen. Wir wagen einen ersten Definitionsversuch.

Definition *Seien X, Y Mengen und $f \subseteq X \times Y$. Dann nennen wir f eine* Abbildung von X nach Y. *Falls für $x \in X$ und $y \in Y$ gilt, dass $(x, y) \in f$, dann schreiben wir auch $f(x) = y$ oder $f : x \longmapsto y$.*

Dem aufmerksamen Leser wird auffallen, dass sich diese Definition (bis auf die etwas andere Schreibweise) nicht von der Definition einer *Relation* unterscheidet (siehe Anfang des Kapitels). Dem pfiffigen Leser wird darüber hinaus auffallen, dass wir nicht alle Aspekte der „Schuldefinition“ einer Abbildunge berücksichtigt haben. Bisher haben wir nur das *Zuordnen* formalisiert.

Die Forderung, dass „jedem Element x genau ein Element y [zugeordnet wird]“, ist in unserem Definitionsversuch nicht enthalten. Sie besteht aus zwei Teilen: Jedes zulässige Element x „abbildbar“ sein und die Zuordnung zu y muss eindeutig sein. Die zu diesen Eigenschaften passenden Begriffe der Hochschulmathematik lauten *linkstotal* und *rechtseindeutig*.

Definition [3.2] *Seien X, Y Mengen und $R \subseteq X \times Y$ eine Relation zwischen X und Y. Wir nennen R* linkstotal, *falls für jedes Element $x \in X$ ein $y \in Y$ existiert, sodass $x \sim y$.*

Eine Relation heißt demnach *linsktotal*, falls wir für jedes Element aus der *linken* Menge X des kartesischen Produkts $X \times Y$ einen Partner aus Y finden. In der Sprache der

Abbildungen gesprochen: Jedes Element aus X ist eine zulässige Eingabe, X ist der Definitionsbereich der Abbildung.

Definition [3.3] *Seien X, Y Mengen und $R \subseteq X \times Y$ eine Relation zwischen X und Y. Wir nennen R* rechtseindeutig*, falls zu jedem $x \in X$ höchstens ein $y \in Y$ existiert, sodass $x \sim y$.*

Eine Relation heißt demnach *rechtseindeutig*, falls wir für jedes Element aus X maximal ein Element in der *rechten* Menge des kartesischen Produkts $X \times Y$ finden. In diesem Sinne wird das Wurzelziehen $\sqrt{\cdot}$ keine Abbildung sein, da für $\sqrt{4}$ eben die Zahlen 2 und -2 in Frage kommen und so sowohl $4 \sim 2$ und $4 \sim (-2)$ gelten.

Wir haben nun sämtlichen Handwerkszeug beisammen, um eine mengentheoretisch saubere Definition von *Abbildungen* im abstrakten Sinne anzugeben. Wir ordnen hierfür einige Begriffe neu an und kodieren in unserem Abbildungsbegriff insgesamt drei Informationen: den Definitionsbereich, die Zielmenge und den Graph als spezielle Relation zwischen Definitionsbereich und Zielmenge.

Definition [3.4] *Seien X, Y Mengen und $G \subseteq X \times Y$ eine Relation zwischen X und Y. Ist G linkstotal und rechtseindeutig, so nennen wir das Tripel $f := (X, Y, G)$ eine* Abbildung von X nach Y *und schreiben*

$$f\colon X \longrightarrow Y.$$

Es gilt also:

- *zu jedem $x \in X$ existiert ein $y \in Y$ mit $x \sim y$*
- *und dieses y ist das einzige Element in Y mit $x \sim y$.*

Dieses zu x eindeutige y mit $x \sim y$ bezeichnen wir mit $f(x)$ und schreiben

$$f(x) = y \text{ oder } f\colon x \longmapsto y.$$

Gegebenfalls nennen wir X den Definitionsbereich*, Y die* Zielmenge *und G den* Graph *der Abbildung f.*

Dies ist die „richtige“ Definition des Abbildungsbegriffs. Alle Grundbegriffe, die wir in der Definition verwendet haben, sind bekannt und eindeutig definiert. Darüber hinaus haben wir nun eine formal saubere Fassung des Zuordnungscharakters der Schuldefinition.

Für die Hochschulmathematik werden mit Blick auf den Zuordnungsaspekt von Abbildngen zwei Begriffe relevant, die in der Schulmathematik kaum Beachtung finden.

Definition [3.5] *Seien X, Y Mengen und $f\colon X \longrightarrow Y$ eine Abbildung.*

(i) *Wir nennen f* injektiv*, falls für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ auch $f(x_1) \neq f(x_2)$ gilt.*

(ii) *Wir nennen f* surjektiv*, falls für alle $y \in Y$ ein $x \in X$ existiert, mit $f(x) = y$.*

Unter *injektiven* Abbildungen verstehen wir Zuordnungen, die Ungleichheiten oder Trennungen erhalten. Starte ich mit zwei Elementen, etwa die Zahlen 2 und -2, von denen ich weiß, dass sie unterschiedlich sind, dann soll eine injektive Abbildung diese Elemente auch auf unterschiedliche Elemente Abbilden. Die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; x \longmapsto x^2$ wäre demnach keine injektive Abbildung, da $f(-2) = 4 = f(2)$ gilt.

Unter *surjektiven* Abbildungen verstehen wir Zuordnungen, die ihre gesamte Zielmenge ausschöpfen. Für jedes Element des Zielbereichs müssen wir ein Element aus dem Definitionsbereich finden, dass Ersterem zugeordnet wird. Betrachten wir wieder die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; x \longmapsto x^2$. Diese ist nicht surjektiv, da echte Quadrate immer positiv sind wir demnach für die Zahl -2 kein Urbild finden.

Die aus mengentheoretischer Sich kanonischen Beispiele für injektive und surjektive Abbildungen sind *Inklusionen* und *Projektionen*.

Definition [3.6] *Seien A, X Mengen mit $A \subseteq X$. Dann nennen wir*

$$\begin{aligned} \iota\colon A &\longrightarrow X \\ a &\longmapsto a \end{aligned}$$

die natürliche Inklusion *von A in X*

Anmerkung ι ist eine injektive Abbildung.

Definition [3.7] *Sei X eine Menge und $\sim$ ein Äquivalenzrelation auf X. Dann nennen wir*

$$\begin{aligned} \pi\colon X &\longrightarrow X/_{\sim} \\ x &\longmapsto [x] \end{aligned}$$

die natürliche Projektion *bzgl. $\sim$.*

Anmerkung π ist eine surjektive Abbildung.

Definition [3.8] *Sei X eine Menge. Dann nennen wir*

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_X : X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

die Identität *auf X.*

Anmerkung id_X ist eine gleichzeitig injektiv und surjektiv Abbildung.

Diese eben definierten Eigenschaften von Abbildungen, tauchen in der Mathematik immer wieder auf. In der Tat sind die drei genannten Beispiele Inklusion, Projektion und Identität *die* zentralen Beispiele für injektive und surjektive Abbildungen. Wir können uns jede injektive Abbildung als Inklusion vorstellen und jede surjektive Abbildung als eine

Projektion auf Äquivalenzklassen interpretieren. Vermutlich kann man diese Erkenntnis erst dann voll und ganz begreifen und würdigen, falls man am Ende des ersten Jahres des Mathematikstudiums darauf zurückblickt. Schreibt Euch am besten eine Erinnerung in Euren Kalender: „TODO: Alle injektiven und surjektiven Abbildung, die ich im letzten Jahr kennengelern habe, als Inklusion oder Projektion interpretieren“.

Will man die Eigenschaft einer Abbildung, injektiv oder surjektiv zu sein, nachzuweisen, gibt es verschiedene Möglichkeiten. Die Gültigkeit einiger dieser Möglichkeiten werden wir nachfolgend zeigen. Insbesondere stellen wir den Zusammenhang zu der Begriffen der Totalität und Eindeutigkeit von Relationen her. Für den Abbildungsbegriff haben wir nur von Linkstotalität und Rechtseindeutigkeit gesprochen. Tatsächlich verbergen sich hinter den parallel formulierten Begriffen der Rechtstotalität und Linkseindeutigkeit gerade die Begriffe der Surjektivität und Injektivität.

Definition [3.9] *Seien X, Y Mengen und $R \subseteq X \times Y$ eine Relation zwischen X und Y.*

- *Wir nennen R* rechtstotal*, falls für jedes Element $y \in Y$ ein $x \in X$ existiert, sodass $x \sim y$.*
- *Wir nennen R* linkseindeutig*, falls zu jedem $y \in Y$ höchstens ein $x \in X$ existiert, sodass $x \sim y$*

Bemerkung [3.10] *Seien X, Y Mengen und $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(i) *f ist injektiv, d.h. für alle $x_1 \neq x_2 \in X$ gilt $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

(ii) *Für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = f(x_2)$ gilt bereits $x_1 = x_2$.*

(iii) *Der Graph G von f ist eine linkseindeutige Relation.*

Beweis:

(i) ⇒ (ii) Dies folgt direkt durch Kontraposition.

(ii) ⇒ (iii) Seien $y \in Y$ und $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \sim_G y$ und $x_2 \sim_G y$. Dies bedeutet gerade, dass $y = f(x_1) = f(x_2)$. Also gilt wegen (ii) bereits $x_1 = x_2$. Es ist demnach $\sim_G$ linkseindeutig.

(iii) ⇒ (i) Seien $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$. Angenommen es gilt $f(x_1) = f(x_2) =: y$. Dann gilt aber $x_1 \sim_G y$ und $x_2 \sim_G y$. Dies ist ein Widerspruch zur Linkseindeutigkeit von $\sim_G$.

□

Bemerkung [3.11] *Seien X, Y Mengen und $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(i) *f ist surjektiv, d.h. für alle $y \in Y$ existiert ein $x \in X$, sodass $f(x) = y$.*

(ii) *Der Graph G von f ist rechtstotale Relation.*

Beweis:

(i) ⇒ (ii) Sei $y \in Y$, dann existiert ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Per Definition bedeutet das, dass $(x, y) \in G$. Das funktioniert für jedes $y \in Y$, also ist der Graph rechtstotal.

(ii) ⇒ (i) Sei $y \in Y$. Da $\sim_G$ rechtstotal ist, existiert ein $x \in X$ mit $x \sim_G y$. Anders formuliert: $f(x) = y$. Wir finden also für jedes vorgelegte $y \in Y$ ein Urbild.

□

3.2 Abbildungsbegriffe mit Änderungsaspekt

Wir wollen in diesem Abschnitt zwei zentrale Begriffe aus den Grundvorlesungen ansprechen. Es geht hierbei nicht darum, diese Begriffe zu verstehen. Vielmehr wollen wir durch diese Begriffe einen anderen Blickwinkel auf Abbildung gewinnen.

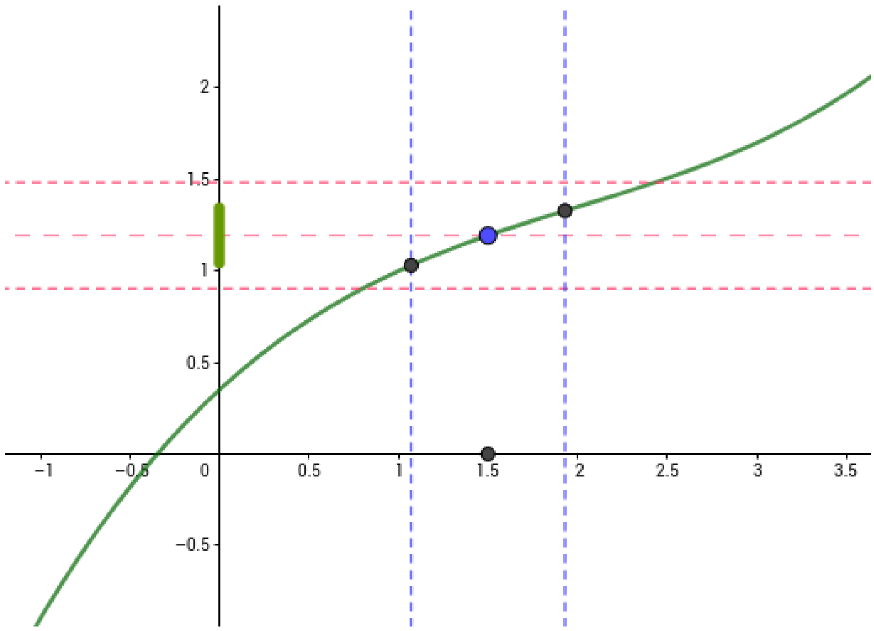
Wir fokussieren bei Abbildung hier nicht länger die Zuordnung von Argumenten zu ihren Bildern, sondern werfen einen Blick darauf, wie man Beziehungen von Änderungsverhalten im Argument einer Funktion (Variation) und Änderungsverhalten im zugehörigen Bild der Funktion (Kovariation[5]) beschreiben kann.

Wir beschränken uns für den Exkurs in die Vorlesung „Analysis 1" auf Abbildungen zwischen reellen Zahlen. Wir setzen dafür die Rechenregeln der reellen Zahlen und das Absolutbetrags voraus.

Definition [3.12] *Es sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung und $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Element des Definitionsbereichs. Wir nennen f in dem Punkt x_0* stetig, *falls für jede beliebige Zahl $\varepsilon > 0$ die folgende Aussage gilt: Es existiert eine Zahl $\delta > 0$, sodass für alle Elemente $x \in \mathbb{R}$ im Definitionsbereich mit der Eigenschaft $|x - x_0| < \delta$ gilt, dass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.*

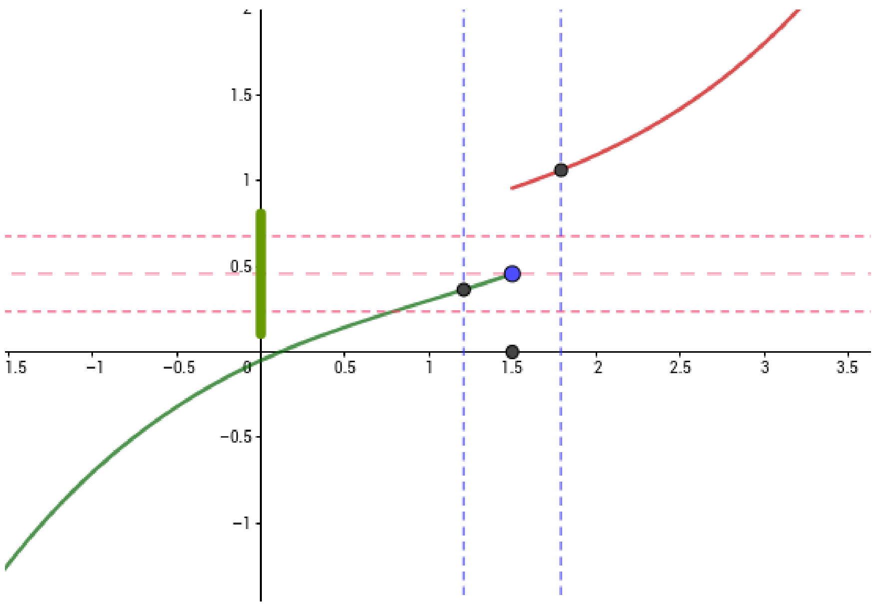
Die Definition sieht auf den ersten Blick sehr verwirrend aus. Wenn wir sie jedoch Stück für Stück auseinandernehmen und als eine Aussage über das Änderungsverhalten der Funktion interpretieren, wird ein Schuh draus.

[5] Quasi, Variationen in der Oppositkategorie, gnihihi. Diese Fußnote ist nur ein Versuch die Tutorinnen und Tutoren zu nerdsnipen (siehe `https://xkcd.com/356/`). Liebe Erstis, ignoriert das hier einfach ;).



Die Definition der Stetigkeit einer Funktion in einem Punkt x_0 beginnt mit der Vorgabe eines Abstands $\varepsilon > 0$ auf der Y-Achse für bestimmte Funktionswerte um $f(x_0)$ (siehe „…, dass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$“ und den roten *Epsilonschlauch* in der Visualisierung). Es wird bei vorliegendem $\varepsilon > 0$ gefordert, dass wir einen Abstand $\delta > 0$ auf der X-Achse finden (siehe „… mit der Eigenschaft $|x - x_0| < \delta$ gilt …“ und die blauen Linien in der Visualisierung), sodass sich die Funktionswerte von Elementen innerhalb dieses Abstands um x_0 innerhalb des Epsilonschlauchs befinden (siehe die schwarzen Markierungen auf den Schaubild der Funktion bzw. die dicke grüne Linie).

Zur Verdeutlichung dieses Konzepts betrachten wir eine nicht-stetige Funktion reeller Zahlen. Die Funktion aus dem folgenden Schaubild ist an der markierten Stelle nicht stetig.



Wir können den (punktweisen) Stetigkeitsbegriff als eine Aussage über ein *gutartiges* Änderungsverhalten von Abbildungen interpretieren. Sei eine Abbildung f in einem Punkt x_0 stetig. In diesem Fall können wir davon ausgehen, dass sich die Urbilder von Punkten, die sich in der Nähe von $f(x_0)$ befinden, in der Nähe von x_0 finden lassen. Ein in diesem Sinne *bösartiges*, also plötzliches oder sprunghaftes, Änderungsverhalten äußert sich nur in Unstetigkeitsstellen (siehe zweite Visualisierung).

Wir beginnen nun einen Exkurs in die Vorlesung „Lineare Algebr 1“ und beziehen uns auch hier auf Abbildungen zwischen reellen Zahlen.

Definition [3.13] *Es sei $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung. Wir nennen f eine* lineare *Abbildung, falls für alle Elemente $x, y \in \mathbb{R}$ aus dem Definitionsbereich und beliebige Zahlen λ die folgenden Aussagen gelten.*

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{und} \quad f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$$

Hier ist die Interpretation der Eigenschaft *Linearität* als eine Aussage über gutartiges Änderungsverhalten fast offensichtlich. Bei linearen Abbildungen übertragen sich Rechenoperationen in der Argumenten direkt auf Rechenoperationen in den Funktionswerten.

3.3 Abbildungen als eigenständige Objekte

In diesem Abschnitt nehmen wir Abbildungen als eigenstände Objekte in den Blick – statt eine Abbildung *für sich* zu studieren, betrachten wir Abbildungen *unter sich*. Dazu werden wir klären, was es für Abbildungen heißt *gleich* oder *unterschiedlich* zu sein, die Einsicht erhalten, dass eine Abbildung selten alleine lebt und eine erste Möglichkeit kennenlernen, mit Abbildungen zu *rechnen*.

Definition [3.14] *Seien X, Y, A, B Mengen, sowie $f\colon X \longrightarrow Y$, $g\colon A \longrightarrow B$ Abbildungen. Dann definieren wir die* Gleichheit *von f und g via*

$$f = g \quad :\Leftrightarrow \begin{cases} & X = A \\ \text{und} & Y = B \\ \text{und} & f(x) = g(x) \quad \text{für alle } x \in X = A \end{cases}$$

Im ersten Abschnitt über Abbildungen haben wir in dem Abbildungsbegriff drei Informationen kodiert: den Definitionsbereich, die Zielmenge und die Zuordnungsrelation. Um zwei Abbildungen *gleich* nennen zu dürfen, forden wir, dass alle drei Informationen übereinstimmen.

Dies wird besonders relevant, wenn wir uns mit der *Bildabbildung* und *Urbildabbildung* beschäftigen. Betrachten wir eine Abbildung $f\colon X \longrightarrow Y$ zwischen zwei Mengen, dann erhalten wir automatisch zwei weitere Abbildungen, die zwar ähnlich heißen, sich jedoch insbesondere in Definittionsbereich und Zielmenge unterscheiden.

Definition [3.15] *Seien X, Y Mengen und $f\colon X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Dann induziert f zwei weitere Abbildungen zwischen den Potenzmengen* $\mathrm{Pot}(X), \mathrm{Pot}(Y)$*:*

$$\begin{aligned} f\colon \mathrm{Pot}(X) &\longrightarrow \mathrm{Pot}(Y) \\ A &\longmapsto \{f(a) \in Y \mid a \in A\} \end{aligned}$$

die Bildabbildung *zu f und*

$$\begin{aligned} f^{-1}\colon \mathrm{Pot}(Y) &\longrightarrow \mathrm{Pot}(X) \\ B &\longmapsto \{x \in X \mid f(x) \in B\} \end{aligned}$$

die Urbildabbildung *zu f. Wir nennen $f(X)$ das* Bild von f *und schreiben auch* $\mathrm{Img}(f)$.

Jetzt, wo wir Abbildungen unterscheiden können, wird es Zeit mit Abbildungen eigene mathematische Operationen durchzuführen. Die wichtigste Verknüpfung zweier Abbildung ist deren Hintereinanderausführung.

Definition [3.16] *Seien X, Y, Z Mengen und $f\colon X \longrightarrow Y$, sowie $g\colon Y \longrightarrow Z$ Abbildungen. Dann definieren wir die Abbildung*

$$\begin{aligned} g \circ f\colon X &\longrightarrow Z \\ x &\longmapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

(gelesen: „g nach f“) als die Komposition *oder* Verkettung *von f und g.*

Definition [3.17] *Es seien X, Y Mengen und $f\colon X \longrightarrow Y$, $g\colon Y \longrightarrow X$ Abbildungen.*

(i) *Wir nennen g eine* Linksumkehrung *zu f, falls $g \circ f = \mathrm{id}_X$ gilt.*

(ii) *Wir nennen g eine* Rechtsumkehrung *zu f, falls $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ gilt.*

(iii) *Wir nennen g eine* Umkehrabbildung *zu f, falls*

$$g \circ f = \mathrm{id}_X \text{ und } f \circ g = \mathrm{id}_Y$$

gilt.

Die Möglichkeit, Abbildungen umzukehren, hängt stark mit Eigenschaften zusammen, die wir bereits in diesem Kapitel betrachtet haben. In der Tat ist eine Abbildung genau dann links-umkehrbar, wenn sie injektiv. Ob eine Abbildung rechts-umkehrbar ist, wenn sie surjektiv ist, bleibt eine Glaubensfrage.

Bemerkung [3.18] *Es seien X, Y Mengen und $f\colon X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(i) *f ist injektiv*

(ii) *Es gibt eine Abbildung* $g\colon Y \longrightarrow X$ *mit* $g \circ f = \mathrm{id}_X$.

Beweis: Um die Äquivalnz dieser Aussagen zu zeigen, müssen wir zwei Implikationen beweisen.

(ii) ⇒ (i) Es gebe eine Abbildung $g\colon Y \longrightarrow X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$. Um zu zeigen, dass f injektiv ist, verwenden wir das Kriterium (ii) aus Bemerkung [3.10].

Seien also $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = f(x_2)$. Durch Anwendung von g auf beiden Seiten dieser Gleichung erhalten wir $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ und wegen der Eigenschaft von g demnach $\mathrm{id}_X(x_1) = \mathrm{id}_X(x_2)$. Da die Identität jedes Element fest lässt, gilt schließlich $x_1 = x_2$. Dies zeigt, dass f injektiv ist.

(i) ⇒ (ii) Sei f injektiv. Unser Ziel ist es, eine Abbildung $g\colon Y \longrightarrow X$ zu konstruieren, welche f rückgängig macht. Dafür ist es uns egal, wie sich g außerhalb des Bildes $f(X)$ von f verhält. Wir fixieren also wahllos ein $x_0 \in X$ und setzen $g(y) := x_0$ für $y \in Y \setminus f(X)$.

Wir müssen g noch auf $f(X)$ konstruieren. Ist $y \in f(X)$ dann existiert nach Definition von $f(X)$ ein Urbild $x_y \in X$ mit $f(x_y) = y$. Wegen Bemerkung [3.10] ist dieses x_y eindeutig. Wir setzen für jedes $y \in f(X)$ das Bild unter g auf dieses eindeutige $g(y) := x_y$. Damit ist g eine auf ganz Y wohldefinierte Abbildung. Dieses g ist nach Konstruktion eine Linksumkehrung von f, denn für $x \in X$ gilt

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x_{f(x)} = x.$$

□

Bemerkung [3.19] *Es seien* X, Y *Mengen und* $f\colon X \longrightarrow Y$ *eine Abbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(i) f *ist surjektiv.*

(ii) *Es gibt eine Abbildung* $g\colon Y \longrightarrow X$ *mit* $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

Beweis:

(ii) ⇒ (i) Es gebe eine Abbildung $g\colon Y \longrightarrow X$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Um zu zeigen, dass f surjektiv, müssen wir für jedes $y \in Y$ ein Urbild in X finden. Es sei $y \in Y$; dann ist $g(y) \in X$. Durch die Eigenschaft von g gilt dann $f(g(y)) = (f \circ g)(y) = y$, also ist $g(y)$ das gesuchte Urbild unter f zu y.

(i) ⇒ (ii) Sei f surjektiv. Unser Ziel ist es, eine Abbildung $g\colon Y \longrightarrow X$ zu konstruieren, für die $f \circ g$ die Identität ist. Es sei $y \in Y$. Da f surjektiv ist, existiert ein Urbild $x_y \in X$ mit $f(x_y) = y$. Für jedes $y \in Y$ wählen wir ein (nicht eindeutiges) Urbild $x_y \in Y$ und konstruieren so durch die Setzung $g(y) := x_y$ unsere gesuchte Abbildung[6].

[6]Es stellt sich die Frage, ob dies ein vernünftiger Konstruktionsprozess ist. Da wir keine Informationen über

□

Existiert für eine Abbildung eine Links- und eine Rechtsumkehrung, dann sind diese Umkehrungen bereits identisch. Mit den eben gezeigten Bemerkungen, sehen wir also, dass eine bijektive Abbildung eine eindeutige beidseitige Umkehrung – eine Umkehrabbildung – besitzt.

Bemerkung [3.20] *Es seien X, Y Mengen und $f\colon X \longrightarrow Y$. Ferner seien $g_l, g_r\colon Y \longrightarrow X$ zwei Abbildengen, wobei g_l eine Linksumkehrung und g_r eine Rechtsumkehrung von f ist. Dann gilt $g_l = g_r$.*

Beweis: Nach den oben formulierten Voraussetzungen habe g_l und g_r den gleichen Wertebereich und die gleiche Zielmenge. Wir müssen noch zeigen, dass sie punktweise Übereinstimmen. Es gelten für alle $x \in X$ und alle $y \in Y$ die Gleichungen

$$(g_l \circ f)(x) = \mathrm{id}_X(x) \qquad \text{und} \qquad (f \circ g_r)(y) = y.$$

Wenden wir auf die zweite Gleichung die Abbildung g_l an, erhalten wir

$$(g_l \circ (f \circ g_r))(y) = g_l(y).$$

Durch Umklammern ergibt sich

$$(g_l \circ f)(g_r(y)) = g_l(y).$$

Wegen $g_l \circ f = id_X$ erhalten wir schließlich $g_r(y) = g_l(y)$, was die Gleichheit der Abbildungen zeigt. □

Folgerung [3.21] *Es seien X, Y Mengen und $f\colon X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(i) *f ist bijektiv.*

(ii) *Es gibt eine Abbildung $g\colon Y \longrightarrow X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.*

Diese eindeutige Abbildung zu f nennen wir die Umkehrabbildung *zu f und bezeichnen*[7] *diese mit f^{-1}.*

die Mengen X und Y haben, könnten diese auch unendlich groß sein. Um g konstruieren zu können, müssen wir also *unendlich oft* eine Auswahl – die Wahl des Urbilds – treffen. Die Frage, ob diese Vorgehensweise gerechtfertigt oder überzeugend ist, ist eine Glaubensfrage. Das sogenannte Auswahlaxiom ermöglicht uns diese Vorgehensweise; seine Gültigkeit kann jedoch nicht bewiesen werden.

[7] Dies ist die gleiche Schreibweise, wie die der Urbildabbildung. Da aber die Urbildabbildung $f^{-1}\colon \operatorname{Pot} Y \longrightarrow \operatorname{Pot} Y$ und die Umkehrabbildung $f^{-1}\colon Y \longrightarrow X$ unterschiedliche Werte- und Bildmengen besitzen, besteht im Regelfall keine Verwechslungsgefahr.