# Relationen und Partitionen

Ein Vortrag im Rahmen
des mathematischen Vorkurses der
**Fachschaft MathPhys**
von
**Fabian Grünig**

Fragen, Anmerkungen und Korrekturen an
fabian@mathphys.fsk.uni-heidelberg.de

# Inhaltsverzeichnis

# Vorwort

Dieser Vortrag entstand im Rahmen des mathematischen Vorkurses der Fachschaft MathPhys an der Universität Heidelberg und wurde zum ersten Mal im Wintersemester 2012/13 gehalten. Da dieser Vortrag, wie der gesamte Vorkurs, stets weiterentwickelt und verbessert wird, bitte ich ausdrücklich darum, mir Fragen, Anmerkungen und Korrekturen zukommen[1] zu lassen.

## Notation

Wir bezeichnen die Menge der natürlichen Zahlen mit $\mathbb{N} := \{1,2,3,\dots\}$ und meinen mit $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ die Menge der natürlichen Zahlen zusammen mit der Null. Ferner bezeichnen wir mit $\mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen, mit $\mathbb{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen und mit $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen. Wir werden diese Zahlenmengen nicht rigoros definieren, sondern vertrauen auf das intuitive Verständnis des Lesers oder der Leserin.

[1] Am besten per Mail an: fabian@mathphys.fsk.uni-heidelberg.de

# 1 Naive Mengenlehre

Wir verwenden in diesem Vortrag eine naive Mengenlehre und wiederholen einige Grundlagen. Wer sich für die Probleme des naiven Mengenbegriffs interessiert oder diese gar fürchtet, den verweise ich auf den Vortrag „Mengen, natürlich Zahlen, Induktion“[2] von Tim Adler im Vorkurs zum Wintersemester 2013/14. In der praktischen Anwendung auf dem Niveau dieses Vortrags unterscheiden sich diese Mengenbegriffe nicht.

**Definition (Georg Cantor, 1895)** *„Unter einer* Menge *verstehen wir jede Zusammenfassung $M$ von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten $m$ unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die* Elemente *von $M$ genannt werden) zu einem Ganzen.“*

Wir bezeichnen Mengen typischerweise mit großen lateinischen Buchstaben $A, B, M, X, Y$. Sprechen wir von Elementen einer Menge, so bezeichnen wir diese mit kleinen lateinischen Buchstaben $a, b, m, x, y$. Ist $m$ ein Element von $M$, so schreiben wir

$$m \in M.$$

Ist $m$ kein Element von $M$, so schreiben wir

$$m \notin M.$$

Wir nennen die Menge, welche keine Elemente enthält, die *leere Menge* und bezeichnen diese mit $\emptyset$.

**Definition** *Seien $X, Y$ Mengen, dann nennen wir $X$ eine* Teilmenge *von $Y$, falls für alle Elemente $x \in X$ auch $x \in Y$ gilt. Gegebenenfalls schreiben wir*

$$X \subseteq Y$$

*Existiert in diesem Fall ein Element $y \in Y$, welches nicht in $X$ enthalten ist ($y \notin X$), so nennen wir $X$ eine* echte Teilmenge *und schreiben*

$$X \subsetneq Y.$$

**Definition** *Seien $X, Y$ Mengen. Wir nennen $X, Y$* gleich *oder* identisch *und schreiben*

$$X = Y,$$

*falls sowohl $X \subseteq Y$, als auch $Y \subseteq X$ gilt.*

**Beispiel** Wir definieren Mengen (und damit ihre Elemente) auf verschiedene Weisen.

[2] johannes.uni-hd.de/vorkurs/2013/skripte/mengen/mengen.pdf

(i) *Explizite Angabe oder Aufzählung der Elemente*
Geben wir alle Elemente einer Menge explizit an, so verwenden wir geschwungene Klammern und trennen die Elemente durch Kommata ab.

$$\{1,2,3\} \text{ oder } \{\text{Alice}, \text{Bob}\}.$$

Dabei beachten wir weder die Reihenfolge der Angabe noch die Doppelnennung etwaiger Elemente. Es gilt etwa

$$\{1,2,3\} = \{1,3,2\} = \{3,2,1,1\}.$$

Besitzt eine Menge nicht endlich viele (oder sehr viele) Elemente, können (oder wollen) wir ihre Elemente nicht aufzählen In diesen Fällen behelfen wir uns mit anderen Möglichkeiten. Ist die Fortsetzung der Angabe klar, so können wir Fortsetzungspunkte verwenden.

$$\{1,2,3,4,\dots\} \text{ oder } \{a,b,c,\dots,A,B,C,\dots\}$$

(ii) *Angabe durch definierende Eigenschaften*
Charakerisieren wir eine Menge durch eine gemeinsame Eigenschaft $E$ ihrer Elemente, so schreiben wir

$$\{x \mid E(x)\}.$$

Verwenden wir für diese Charakterisierung mehrere Eigenschaften $E_1, E_2, E_3, \dots$, so können wir diese mittels logischen Operatoren verknüpfen.

$$\{x \mid E_1(x) \wedge E_2(x) \wedge E_3(x) \wedge \dots\}$$
$$\{x \mid E_1(x) \vee E_2(x) \vee E_3(x) \vee \dots\}$$

Wollen wir etwa alle natürlichen Zahlen, die gerade sind, zu einer Menge zusammenfassen, so formulieren wir dies durch

$$\{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge (x \text{ ist gerade.})\}.$$

Wollen wir über ein (unbestimmtes) Element einer Menge reden, so verwenden wir *Elementvariablen*. Es kann $x \in \{\text{Alice}, \text{Bob}\}$ für Alice oder Bob stehen, ist aber innerhalb dieser Menge unbestimmt. Alice ist eine *Elementkonstante* von $\{\text{Alice}, \text{Bob}\}$, also bestimmt.

**Definition** *Sei $X$ eine Menge. Dann nennen wir die Menge aller Teilmengen von $X$ die*

Potenzmenge von $X$ *und bezeichnen diese mit*

$$\operatorname{Pot}(X) := \{Y \mid Y \subseteq X\}.$$

**Beispiel** Sei $X := \{1,2,3\}$. Dann ist

$$\operatorname{Pot}(X) = \Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\Big\}.$$

**Definition** *Seien $X, Y$ Mengen, dann nennen wir die Menge aller (geordneten) Paare von Elementen von $X$ und $Y$ das* kartesische Produkt *und schreiben*

$$X \times Y := \{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

**Beispiel** Seien $X := \{1,2,3\}$ und $Y := \{\text{Alice}, \text{Bob}\}$. Dann ist

$$\begin{aligned} X \times Y = \Big\{&(1,\text{Alice}), (2,\text{Alice}), (3,\text{Alice}),\\ &(1,\text{Bob}), (2,\text{Bob}), (3,\text{Bob})\Big\} \end{aligned}$$

**Definition** *Seien $X, Y$ und $X_1, X_2, X_3, \ldots$ Mengen. Wir definieren*

$$X \cup Y := \{z \mid z \in X \textit{ oder } z \in Y\}$$

*als die* Vereinigung von $X$ und $Y$ *und*

$$X \cap Y := \{z \mid z \in X \textit{ und } z \in Y\}$$

*als den* Schnitt von $X$ und $Y$. *Ausserdem schreiben wir*

$$\bigcup_i X_i \textit{ bzw. } \bigcap_i X_i$$

*für die Vereinigung bzw. den Schnitt aller Mengen $X_1, X_2, X_3, \ldots$.*[3]

[3] Diese Notation ist nur dann wohldefiniert, falls $\cup$ bzw. $\cap$ assoziativ und kommutativ sind. Der Nachweis dieser Eigenschaften ist eine lohnende Übungsaufgabe.

# 2 Partitionen und Äquivalenzrelationen

## 2.1 „Wohngemeinschaften und die GEZ“

Wir blicken zurück auf den Beginn des Wintersemesters 2012/13. Viele Studienanfänger*innen lauschen gespannt dem mathematischen Vorkurs, lernen sich und die Stadt kennen und ziehen vielleicht in Wohngemeinschaft zusammen. Ein paar Tage nach dem Einzug erhalten sie auf einmal Post von der Gebühreneinzugszentrale der öffentlich-rechtlichen Rundfunkanstalten (kurz GEZ). Seit langer Zeit verlangte sie von jedem Menschen in Deutschland Rundfunkgebühren. Das Gebührenmodell betrachtet dazu die Menge

$$D := \{x \mid x \text{ ist Mensch in Deutschland}\}$$

Seit dem Jahr 2012 sieht die Welt aber anders aus. Die GEZ heißt jetzt ARD ZDF Deutschlandradio Beitragsservice, die Rundfunkgebühren heißen Rundfunkbeiträge, und das Gebührenmodell sieht eine Haushaltspauschale vor. Wir betrachten also

$$H := \{h \mid h \text{ ist ein Haushalt in Deutschland}\}$$

Die Haushalte $h$ enthalten Menschen aus Deutschland[4]. Wir können nur spekulieren, was sich die Zuständigen dabei gedacht haben, aber vermutlich hatten sie folgende Hoffnungen

- Der Verwaltungsaufwand wird kleiner. „$H$ ist kleiner als $D$“.
- Jeder Mensch ist Mitglied in einem Haushalt. Alle werden erfasst.
- Niemand ist Mitglied in zwei Haushalten. Keiner muss doppelt zahlen.

Die GEZ hofft also, dass $H$ eine *Partition* von $D$ ist. Dieses Begriff können wir auf mathematische Weise formulieren.

**Definition [2.1]** *Sei $X$ eine Menge und $P := \{P_1, P_2, P_3, \dots\} \subseteq \mathrm{Pot}(M)$ eine Menge von nichtleeren Teilmengen von $X$. Wir nennen $P$ eine* Partition von $X$, *falls*

$$X = \bigcup_i P_i$$

*und für alle $P_i, P_j \in P$ genau eine der folgenden Aussagen wahr ist:*

(i) $P_i = P_j$

(ii) $P_i \cap P_j = \emptyset$

[4] Die Haushalte $h$ können also als Mengen interpretiert werden, auch wenn wir hier kleine Buchstaben verwenden.

## 2.2 Äquivalenzrelationen

Die Denkweise des Gebührenmodells der GEZ entspricht nicht unserem Denkmuster im Alltag. Wir nehmen unser Leben in Wohngemeinschaften selten als eine Partition aller Menschen wahr und denken wesentlich lokaler. Für uns ist das Zusammenwohnen eher eine *Beziehung* von einem Menschen zu einem anderen. Fragen wir Alice, wo Bob denn wohnt, hören wir „Bob? Mit dem wohne ich zusammen." und nicht „Bob und ich sind im selben Haushalt."

Welche (intuitiven) Anforderungen stellen wir an eine solche Beziehung?

- Alice wohnt zusammen mit Alice. Klingt komisch, ist aber so.
- Alice wohnt zusammen mit Bob. Also wohnt Bob auch zusammen mit Alice.
- Alice wohnt zusammen mit Bob. Bob wohnt zusammen mit mit Charlie. Also wohnt Alice auch zusammen mit Charlie.

**Definition** [2.2] *Sei $X$ eine Menge und $R \subseteq X \times X$. Dann nennen wir $R$ eine* Relation *auf $X$. Ist $(x,y) \in R$, so schreiben wir auch*

$$x \sim_R y$$

*und sagen $x$* steht in Relation $R$ zu $y$*.*

Für den Relationenbegriff kodieren wir die Elemente, die in Beziehung stehen sollen in einem Paar, also ein Element des kartesischen Produkts. Beziehungen, die die obigen gewünschten Eigenschften besitzen, nennen wir Äquivalenzrelationen.

**Definition** [2.3] *Sei $X$ eine Menge und $R$ eine Relation auf $X$. Dann nennen wir $R$ eine* Äquivalenzrelation*, falls für alle $x,y,z \in R$ folgendes gilt*

(i) $(x,x) \in R$. *(Reflexivität)*

(ii) *Aus $(x,y) \in R$ folgt $(y,x) \in R$.* *(Symmetrie)*

(iii) *Aus $(x,y),(y,z) \in R$ folgt $(x,z) \in R$.* *(Transitivität)*

Im Folgenden schreiben wir kurz $x \sim y$, falls keine Verwechslungsgefahr mit anderen Relationen besteht. Ausserdem bezeichnen wir die Relation $R$ kurz mit $\sim$.

Wir wollen nun untersuchen, ob die beiden Denkweisen der Gebührenzentrale und der WG-Bewohner*innen äquivalent sind oder nicht. Dazu arbeiten wir mit den mathematischen Begriffen der Partition und der Äquivalenzrelation. Wir betrachten zunächst die Menge der Bewohner*innen einer WG, also die Menge aller Menschen, die zu einem bestimmten Menschen in der „...wohnt zusammen mit..."-Relation stehen. Diese Mengen nennen wir Äquivalenzklassen.

**Definition [2.4]** *Sei $X$ eine Menge, $R \subseteq X \times X$ eine Äquivalenzrelation und $x \in X$ ein Element in $X$. Dann nennen wir*

$$[x] := \{y \in X \mid y \sim_R x\}$$

*die* Äquivalenzklasse von $x$. *Sie besteht aus allen Elementen, die mit $x$ in Beziehung stehen.*

In unserem Beispiel der „...wohnt zusammen mit...“-Relation ist [Bob] die Menge aller Mitbewohner von Bob (und auch Bob). Diese Menge ist aber identisch mit [Alice], da Alice und Bob natürlich die selben Mitbewohner haben. Die Auswahl des Menschen, die die Vertreter*in der WG ist, ist beliebig und ändert nichts an der WG.

**Bemerkung [2.5]** *Sei $X$ eine Menge, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $X$ und $x \in X$. Dann gilt für alle $y \in [x]$:*

$$[x] = [y].$$

*Beweis:* Sei $y \in [x]$, das heißt $y \sim x$. Da $\sim$ symmetrisch ist, gilt auch $x \sim y$. Wir zeigen die Gleichheit von Mengen:

„$\subseteq$“ Sei $z \in [x]$, also $z \sim x$. Wegen der Transitivität von $\sim$ gilt dann $z \sim y$. Also $z \in [y]$.

„$\supseteq$“ Sei $z \in [y]$, also $z \sim y$. Wir nutzen wieder die Transitivität von $\sim$ und erhalten $z \sim x$, also $z \in [x]$.

Also gilt $[x] \subseteq [y]$ und $[x] \supseteq [y]$ und somit $[x] = [y]$.

□

Die Äquivalenzklassen von Elementen, die in Relation stehen sind demnach bereits gleich. Wir klären nun, wie sich Äquivalenzklassen von Elementen verhalten, die *nicht* in Relation stehen.

**Bemerkung [2.6]** *Seien $X$ eine Menge, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $X$ und $x, y \in X$. Dann gilt genau eine der folgenden Aussagen:*

(i) $[x] = [y]$

(ii) $[x] \cap [y] = \emptyset$

*Beweis:* Wir unterscheiden die Fälle $x \in [y]$ und $x \notin [y]$.

($x \in [y]$) Gelte $x \in [y]$, dann folgt wegen Bemerkung [2.5] bereits $[x] = [y]$. Die erste Aussage ist also wahr. Außerdem gilt $x \in [x] \cap [y] \neq \emptyset$, wonach die zweite Aussage falsch ist.

($x \notin [y]$) Gelte $x \notin [y]$, also insbesondere $[x] \neq [y]$. Angenommen es existiert ein $z \in [x] \cap [y]$, also $z \sim x$ und $z \sim y$. Da $\sim$ symmetrisch ist, folgt $x \sim z$ und wegen der Transitivität von $\sim$ auch $x \sim y$. Dann gilt aber $x \in [y]$, ein Widerspruch. Die Annahme war falsch und es gilt $[x] \cap [y] \neq \emptyset$.

□

**Definition [2.7]** *Sei $X$ eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $X$. Dann bezeichnen wir mit*

$$X/_{\sim} := \Big\{[x] \mid x \in X\Big\}$$

*die* Menge der Äquivalenzklassen von $X$ bzgl. $\sim$.

Die Menge $X/_{\sim}$ ist in unserem Beispiel die Menge aller WGs in Deutschland. Diese Menge bildet eine Partition aller Menschen in Deutschland und zwar genau die Partition, die der Denkweise der Gebührenzentrale entspricht.

**Satz [2.8]** *Sei $X$ eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $X$. Dann ist $X/_{\sim}$ eine Partition von $M$.*

*Beweis:* Seien $[x_1], [x_2], [x_3], \ldots$ die verschiedenen Äquivalenzklassen bezüglich der Äquivalenzrelation $\sim$. Wir müssen zeigen

(i) $X = \bigcup_i [x_i]$

(ii) Für alle $x, y \in X$ mit $[x] \neq [y]$ gilt $[x] \cap [y] = \emptyset$.

Die zweite Aussage (ii) folgt direkt aus Bemerkung [2.6]. Wir zeigen noch (i) und müssen die Gleichheit dieser Mengen nachweisen. Sei $x \in X$, dann ist sicher $x \in [x]$. Die Äquivalenzklasse $[x]$ stimmt wegen Bemerkung [2.6] mit einer der Äquivalenzklassen $[x_j]$ überein. Damit ist

$$x \in [x_j] \subseteq \bigcup_i [x_i].$$

Ausserdem ist klar, dass $\bigcup_i [x_i] \subseteq X$, da $[x_i] \subseteq X$.

□

**Satz [2.9]** *Sei $X$ eine Menge und $P \subseteq \mathrm{Pot}(X)$ eine Partition von $X$, dann existiert eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf $X$, sodass*

$$X/_{\sim} = P.$$

*Beweis:* Diesen Beweis überlassen wir als Übungsaufgabe. □

# Aufgaben

## Naive Mengenlehre

**Aufgabe [1]** Wir betrachten die Mengen $T := \{\text{Dr.}\}, A := \{\text{Herr, Frau}\}$, $V := \{\text{Alice, Bob}\}$ und $N := \{\text{Hathaway, Sinclair, Wayne}\}$. Bilde die folgenden Mengen.

(i) $A \times N$

(ii) $A \times (V \times N)$

(iii) $(A \times T) \times (V \times N)$

(iv) $(T \times V) \cup (A \times V)$

**Aufgabe [2]** Seien $X, Y, Z$ Mengen. Beweise, dass folgenden Identitäten gelten.

(i) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$

(ii) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$

(iii) $X \cup Y = Y \cup X$

(iv) $X \cap Y = Y \cap X$

(Diese Aufgabe ist optional.)

## Partitionen und Äquivalenzrelationen

**Aufgabe [3]** Betrachte die Menge $M := \{\text{Alice, Bob, Charlie, Dave}\}$. Welche der folgenden Mengen $P_i$ sind Partitionen von $M$?

(i) $P_1 := \Big\{\{\text{Alice , Bob}\}, \{\text{Dave}\}\Big\}$

(ii) $P_2 := \Big\{\text{Dave, Alice, Bob, Charlie}\Big\}$

(iii) $P_3 := \Big\{\{\text{Dave, Alice, Bob, Charlie}\}\Big\}$

(iv) $P_4 := \Big\{\{\text{Dave}\}, \{\text{Alice}\}, \{\text{Charlie}\}, \{\text{Bob}\}\Big\}$

(v) $P_5 := \Big\{\{\text{Dave}\}, \{\text{Bob,Charlie}\}, \{\text{Alice,Dave}\}\Big\}$

Bilde zwei weitere Partitionen von $M$.

**Aufgabe [4]** Betrachte $M := \{a, b, c, d\}$. Sind die folgenden Relationen auf $M$ reflexiv, symmetrisch, transitiv, Äquivalenzrelationen?

(i) $R_1 := \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b)\}$

(ii) $R_2 := \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d)\}$

(iii) $R_3 := \{(a,b), (b,c), (c,d), (d,a)\}$

(iv) $R_4 := \{(a,a), (b,b), (a,b), (b,a), (c,c), (d,d)\}$

(v) $R_5 := \{(a,b),(b,c),(c,d),(a,c),(a,d),(b,d)\}$

Bilde zwei weitere Äquivalenzrelationen auf $M$.

**Aufgabe [5]** Welche der folgenden Relationen sind Äquivalenzrelationen? Gib gegebenenfalls die Äquivalenzklassen an.

(i) Betrachte die Relation $\sim$ auf $\mathbb{Q}$, definiert via $a \sim b :\Leftrightarrow ab > 0$

(ii) Betrachte die Relation $\sim$ auf $\mathbb{Z}$, definiert via $a \sim b :\Leftrightarrow a + b$ ist gerade.

(iii) Betrachte die Relation $\sim$ auf $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$, definiert via $a \sim b :\Leftrightarrow ab \geq 0$

(iv) Sei $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Betrachte die Relation $\sim_n$ auf $\mathbb{Z}$, definiert via $a \sim_n b :\Leftrightarrow n$ ist ein Teiler von $a - b$.

(v) Betrachte die Relation $\sim$ auf der Menge aller Menschen, definiert via „... ist Geschwister von ...“.

**Aufgabe [6]** Sei $X$ eine Menge, $n \in \mathbb{N}$ und $P := \{P_1, \dots, P_n\} \subseteq \text{Pot}(X)$ eine Partition von $X$. Zeige, dass eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf $X$ existiert, sodass

$$X/_{\sim} = P.$$

*Beweis:* (Anleitung) Konstruiert eine Relation $\sim$, indem ihr eine Bedingung angebt, wann zwei Elemente aus $X$ in Relation stehen. Für $x, y \in X$ definiere

$$x \sim y \;:\Leftrightarrow\; ???.$$

Dabei muss diese Relation so definiert sein, dass sie eine Äquivalenzrelation ist. Dies ist nachzuweisen. Außerdem muss die Äquivalenzrelation so konstruiert werden, dass die Äquivalenzklasse eines Elements $x \in X$ mit einer der Teilmengen $P_i$ übereinstimmt, also $[x] = P_i$ für ein geeignetes $i$ gilt. □