Aufgaben Differentialrechnung

Leite die folgenden Funktionen nach x ab.

1

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6x - 5$
$\frac{df}{dx} = -x + 6$
b) $f(x) = -\frac{4}{x^3} = -4 \cdot x^{-3}$
$\frac{df}{dx} = 3\frac{4}{x^4} = \frac{12}{x^4}$
c) $f(x) = 2\sin(\pi x)$
$\frac{df}{dx} = 2\pi\cos(\pi x)$

2

a) $f(x) = e^{-x}$
$\frac{df}{dx} = -e^{-x}$
b) $f(x) = \sqrt{e^x} = (e^x)^{\frac{1}{2}}$
$\frac{df}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^x\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^x = \frac{1}{2}\frac{e^x}{\sqrt{e^x}} = \frac{1}{2}\sqrt{e^x}$
c) $f(x) = -\ln(2x)$
$\frac{df}{dx} = \frac{-2}{2x} = \frac{1}{x}$

3

a) $f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{1-e^x}\right) = = \ln(1+e^x) - \ln(1-e^x)$
$\frac{df}{dx} = \frac{e^x}{1+e^x} - \frac{-e^x}{1-e^x} = \frac{e^x(1-e^x)+e^x(1+e^x)}{1-e^{2x}} = \frac{2e^x}{1-e^{2x}}$
b) $f(x) = \ln\left(\sqrt[3]{\frac{e^{3x}}{1+\sin(2x)}}\right)$
$\frac{df}{dx} = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{e^{3x}}{1+\sin(2x)}\right) \ldots = \frac{3\sin(2x)-2\cos(2x)+3}{3\sin(2x)+3}$
c) $f(x) = 2x - (\ln(2 - 4 \cdot e^x))^2$
$\frac{df}{dx} = \frac{8e^x\ln(2-4e^x)}{2-4e^x} + 2$

4

a) $f(x) = \ln(\ln(x))$
$\frac{df}{dx} = \frac{1}{x\ln(x)}$
b) $f(x) = b \cdot x^{a+2} \cdot \sin(e^{(c-d)})$
$\frac{df}{dx} = b(a+2) \cdot x^{a+1} \cdot \sin(e^{c-d})$
c) $f(x) = x^x$
$\frac{df}{dx} = x^x(\ln(x) + 1)$

Übungsaufgaben

Partielle Integration

1. partielle Integration: f'=e^x und g=x, damit sind: f=e^xund g'=1, es folgt:

$$\int_0^2 x \cdot e^x dx = xe^x|_0^2 - \int_0^2 e^x dx = xe^x|_0^2 - e^x|_0^2$$

2. partielle Integration: f'=1 und g=$\ln^2(x)$, damit sind: f=x und g'=$\frac{2\ln(x)}{x}$, es folgt:

$$\int_1^3 \ln^2(x)dx = x\ln^2(x)|_1^3 = 3\ln^2(3) - 6\ln(3) + 4$$

3. partielle Integration: f'=x und g=$\ln(x)$, damit sind: f=$\frac{x^2}{2}$und g'=$\frac{1}{x}$, es folgt:

$$\int_e^{e^2} x\ln(x)dx = \frac{x^2\ln(x)}{2}|_e^{e^2} - \int_e^{e^2} \frac{x}{2}dx = \frac{x^2\ln(x)}{2}|_e^{e^2} - \frac{x^2}{4}|_e^{e^2} = \frac{3e^4 - e^2}{4}$$

4. partielle Integration: f'=e^x und g=x^2, damit sind: f=e^x und g'=$2x$, es folgt:

$$\int_0^1 x^2 \cdot e^x dx = x^2e^x|_0^1 - \int_0^1 2xe^x dx \qquad (*)$$

lï¿½se $\int_0^1 2x \cdot e^x dx$
partielle Integration: f'=e^x und g=x, damit sind: f=e^xund g'=1, es folgt:

$$\int_0^1 2x \cdot e^x dx = 2 \cdot (xe^x|_0^1 - \int_0^1 e^x dx) = 2 \cdot (xe^x|_0^1 - e^x dx|_0^1)$$

setzte dies in (*) ein:

$$... = x^2e^x|_0^1 - 2xe^x + 2e^x|_0^1 = e - 2$$

Substitution

Löse die folgenden Integrale mit Hilfe von Substitution:

1. Substituiere: $u = -x$ es folgt: $\dfrac{du}{dx} = -1$

$$\int_0^s e^{-x}dx = -\int_0^{-s} e\frac{1}{2} = -e\frac{1}{2}|_0^{-s} = 1 - e^{-s}$$

2. Substituiere: $u = x + 1$, es folgt: $\dfrac{du}{dx} = 1$

$$\int_0^9 \frac{1}{(x+1)^2}dx = \int_1^{10} \frac{1}{u^2}du = -\frac{1}{u}|_1^{10} = \frac{9}{10}$$

3. Substituiere: $u = \ln(x)$, es folgt: $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{x}$

$$\int^1 \frac{\ln(x)}{x}dx = \int_0^{\ln(2)} udu = \frac{u^2}{2}|_0^{\ln(2)} = \frac{\ln^2(2)}{2}$$

4. Substituiere: $u = \ln(x)$ es folgt: $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x}dx = \int_0^{\ln(2)} \sqrt{u}du = \frac{2u^{3/2}}{3}|_0^{\ln(2)} = \frac{2\ln^{3/2}(2)}{3}$$

Substitution und partielle Integration

Substituiere: $u = x^2 + 1$ es folgt: $\frac{du}{dx} = 2x$

$$\int_0^1 x \ln(x^2+1)dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \ln(u)du \qquad (**)$$

lï¿½se: $\displaystyle\int_1^2 \ln(u)du$ mit partieller Integration: f'= 1 und g= $\ln(u)$ es folgt: f= u und g'= $\frac{1}{u}$

$$\int_1^2 \ln(u)du = u\ln(u)|_1^2 - \int_1^2 1du = u\ln(u)|_1^2 - u|_1^2$$

einsetzen in (**):

$$... = \frac{u\ln(u)}{2} - \frac{u}{2}|_1^2 = \frac{2\ln(2)-1}{2}$$

Lösungen

Trigonometrische Funktionen

Berechne/Vereinfache die folgenden Ausdrücke:

1. $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{3}{8}}$
2. $\sin(x)^2 \cdot \cos(x)^2 + \sin(x)^4 = \sin(x)^2$
3. $\cos(x - \pi) \cdot \cos(9\pi) = \cos(x)$
4. $\cos(2x) + \sin(x)^2 = \cos(x)^2$
5. $\tan(x)^2 - \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{\cos(x)^2}$
6. $\cos(x)^3 - \frac{\sin(x+\pi) \cdot \sin(2x)}{2} = \cos(x)$

Komplexe Zahlen

Berechne/Vereinfache die folgenden Ausdrücke:

1. $2 + 6i \;+\; (7 - 3i) = 9 + 3i$
2. $(4 - i) \cdot (5 + 9i) = 29 + 31i$
3. $\frac{2 + 2i}{4 - 5i} = \frac{18i - 2}{41}$
4. $2e^{i\pi/3} \cdot 3e^{i\pi/2} = 6e^{5\pi/6} = 3 \cdot (i - \sqrt{3})$
5. $\frac{4e^{i2\pi}}{9e^{i\pi}} = \frac{4}{9}e^{i\pi} = -\frac{4}{9}$

Weitere Aufgaben:

1. Berechne das multiplikativ Inverse von $4 + 3i$ sowie $5e^{i\pi/6}$.

   Lösung: $\frac{4-3i}{25}$ und $0.2e^{-i\pi/6}$
2. Zeige, dass $\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sin x$.

   Lösung: Einsetzen der Eulerformel.
3. Transformiere $z = 1 + \sqrt{3}i$ in die Polardarstellung.

   Lösung: $z = 2e^{i\pi/3}$
4. Transformiere $z = 8e^{i\pi/4}$ in die Real-/Imaginärteil-Darstellung.

   Lösung: $z = \frac{8}{\sqrt{2}} \cdot (1 + i)$
5. Berechne i^i.

   Lösung: $i^i = e^{i \cdot i\pi/2} = e^{-\pi/2}$

Aufgaben zur Polynomdivision – Lösungen

0. Start 11424

1. Aufwärmen

b) (i) $5x^7 - x^6 - 10x^5 + 6x^4 - x^3 + 2x^2 - x$
   (ii) $-x^6 + 2x^4 + 2x^3 - 6x + 3$
   (iii) $-5x^7 + x^6 + 16x^4 - 3x^3 - 3x$

2. Polynomdivision

a) $x + \sqrt{2}$

b) $x^2 - 1$

c) $x^3 - 2x + 0.5$

d) $x^2 + 2x - 4 + \frac{1}{2x+1}$

e) $x + 1$

f) $x^2 - 6x + 5$

g) -1

3. Nullstellen

a) $\pm 1, -2$

b) $-1, \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$

c) $-5, 2$

d) $\pm 3, \pm 2$

e) ± 3. Es bleibt ein Faktor $x^2 + 1$ zurück, der komplexe Nullstellen bei $\pm i$ ergäbe.

Übungsaufgaben

Rechnen mit Vektoren

Gegeben seien die folgenden reelwertigen Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1. Zeichnen Sie die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ in ein kartesisches Koordinatensystem.
2. Berechnen Sie
$$\vec{a} + \vec{b}, \qquad \vec{c} - 2\vec{d}, \qquad \vec{a} + 3\vec{d}, \qquad \vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}.$$
Und skizzieren Sie dies.
3. Berechnen Sie
$$\vec{a} \cdot \vec{b}, \qquad \vec{c} \cdot \vec{a}, \qquad \vec{a} \cdot \left(\vec{d} - \vec{c}\right), \qquad \vec{a}\left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right).$$
Und verdeutlichen Sie mit einer Skizze, was das Skalarprodukt bedeutet.
4. Berechnen Sie die Beträge der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$. Sind zwei der Vektoren gleich? Überlegen Sie sich zu jedem Vektor einen Vektor der gleich zu diesem, aber nicht identisch ist.
5. Berechnen Sie
$$\vec{a} \times \vec{b}, \qquad \vec{c} \times \left(\vec{a} + \vec{b}\right), \qquad \left(\vec{d} \times \vec{a}\right) \cdot \left(\vec{b} - \vec{c}\right).$$

Vektoren in Komponentendarstellung

Seien $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3} \in \mathbb{R}^3$ die orthogonalen Einheitsvektoren in x-, y- und z-Richtung.

(i) Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke

  (a) $\vec{e_1} \cdot (\vec{e_2} - 5\vec{e_3})$

  (b) $(\vec{e_1} + 5\vec{e_2}) \cdot (8\vec{e_2} - 6\vec{e_2})$

  (c) $(6\vec{e_1} + 4\vec{e_2} + \vec{e_3}) \cdot (2\vec{e_1} - 6\vec{e_2} + 18\vec{e_3})$

(ii) Bstimmen Sie den Paramter $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass die Vektoren $\vec{a} = \vec{e_1} - 2\alpha\vec{e_2} + 7\alpha\vec{e_3}$ und $\vec{b} = 24\vec{e_1} + \frac{\alpha}{3}\vec{e_2} + 0\vec{e_3}$ orthogonal zueinander sind.

(iii) Welche Länge hat die Projektion des Vektors $\vec{a} = -\vec{e_1} + 2\vec{e_2} + 3\vec{e_3}$ auf die Richtung des Vektors $\vec{b} = 2\vec{e_1} - 6\vec{e_2} + 2\vec{e_3}$?

(iv) Bestimmen Sie all jene Einheitsvektoren, die orthogonal zum Vektor $\vec{e_3}$ sind.

Rechnen mit Matrizen und Vektoren

Gegeben seien die folgenden reellwertigen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 8 \\ -3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix}$$

sowie die reelwertigen Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie $A + B$, $A + 5B - C$, $-2C + 3B$.

(b) Berechnen Sie $A^T - B$, $B^T - C^T$, $A^T - 3B + C^T$.

(c) Berechnen Sie $A \cdot \vec{a}$, $C \cdot \vec{c}$, $2B\left(\vec{a} - 3\vec{b}\right)$.

(d) Berechnen Sie $AB - BA$, $CA - AC$, $BC - CB$.

(e) Berechnen Sie die Determinanten der Matrizen A, B und C.

(f) Zeigen Sie explizit am Beispiel der Matrizen A und B, dass $det(AB) = det(A)det(B)$ gilt.

Gaußverfahren

Lösen Sie jeweils das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$, mit

1.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

2.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3.

Invertieren von Matrizen

Berechnen Sie die Determinaten der folgenden Matrizen und versuchen Sie dann diese zu invertieren, wenn möglich.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 84 & 88 \\ 168 & 176 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 9 & 8 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 9 & 8 & 7 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösungen

Rechnen mit Vektoren

1. Wichtig: Die Vektoren fangen alle im Punkt $(0, 0, 0)$ an.

2. $$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} + 3\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} - 2\vec{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

3. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) = 0$

   $\vec{c} \cdot \vec{a} = (-2) \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 = 12$

   $\vec{a}(\vec{d} - \vec{c}) = \vec{a} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 3 \cdot (-2) = -4$

   $\vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}) = \vec{a}\left((-2) \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 2\right) = \vec{a} \cdot 9 = \begin{pmatrix} 9 \\ 18 \\ 27 \end{pmatrix}$

   Das Skalarprodukt ist anschaulich gesehen nur die Projektion zweier Vektoren aufeinander, also die Länge, die diese beiden Vektoren projiziert aufeinander überlappen. Deswegen ergibt das Skalarprodukt von zwei senkrechten Vektoren Null.

4. $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

   $|\vec{b}| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{19}$

   $|\vec{c}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 4^2}\sqrt{21}$

   $|\vec{d}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

   Die Vektoren sind alle nicht gleich, da Sie alle eine unterschiedliche Länge haben. Gleiche Vektoren wären nur im Koordinatensystem verschoben, gleiche Vektoren sehen in Vektorschreibweise exakt gleich aus.

5. $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 2 - 3 \cdot 3 \\ -3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \end{pmatrix}$

   $$\vec{c} \times \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \vec{c} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 \\ -2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \\ -2 \cdot 5 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

   $$\left(\vec{d} \times \vec{a}\right) \cdot \left(\vec{b} - \vec{c}\right) = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 - 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = 1 + 4 - 5 = 0$$

Vektoren in Komponentendarstellung

Wichtig bei dieser Aufgabe ist zu wissen, dass $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ jeweils orthogonal zueinander sind, das Skalarprodukt zweier verschiedener Einheitsvektoren also Null ist.

1. (a) $\vec{e_1} \cdot (\vec{e_2} - 5\vec{e_3}) = \vec{e_1} \cdot \vec{e_2} - 5\vec{e_1} \cdot \vec{e_3} = 0$
   (b) $(\vec{e_1} + 5\vec{e_2}) \cdot (8\vec{e_2} - 6\vec{e_2}) = 5 \cdot 2\vec{e_2}^{\,2} = 10$
   (c) $(6\vec{e_1} + 4\vec{e_2} + \vec{e_3}) \cdot (2\vec{e_1} - 6\vec{e_2} + 18\vec{e_3}) = 6 \cdot 2\vec{e_1}^{\,2} - 4 \cdot 6\vec{e_2}^{\,2} + 1 \cdot 18\vec{e_3}^{\,2} = 12 - 24 + 18 = 6$

2. es soll gelten: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
   $\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{e_1} - 2\alpha\vec{e_2} + 7\alpha\vec{e_3}) \cdot (24\vec{e_1} + \frac{\alpha}{3}\vec{e_2} + 0\vec{e_3}) = 24 - 2\frac{\alpha^2}{3}$
   setze diesen Ausdruck gleich Null und forme um, es folgt: $\alpha^2 = \sqrt{36}$ bzw. $\alpha = \pm 6$

3. zu bestimmen ist: $\vec{a}\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = (\vec{e_1} + 2\vec{e_2} + 3\vec{e_3}) \cdot (2\vec{e_1} - 6\vec{e_2} + 2\vec{e_3})\frac{1}{\sqrt{44}} = \frac{-2}{\sqrt{11}}$

4. $\vec{e_1}$ und $\vec{e_2}$ sind per Definition orthogonal zu $\vec{e_3}$

Rechnen mit Vektoren und Matrizen

1. $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 7 \\ -3 & 6 & 4 \\ -2 & 3 & 12 \end{pmatrix}$

   $$A + 5B - C = \begin{pmatrix} -8 & 23 & 39 \\ -15 & 14 & 16 \\ 2 & 19 & 30 \end{pmatrix} - C = \begin{pmatrix} -9 & 21 & 36 \\ -19 & 19 & 10 \\ 9 & 11 & 21 \end{pmatrix}$$

   $$-2C + 3B = \begin{pmatrix} -8 & 16 & 18 \\ -3 & -4 & 21 \\ 10 & 28 & 3 \end{pmatrix}$$

2. $A^T - B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} - B = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -11 \\ 6 & 2 & -4 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

   $$B^T - C^T = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \\ 8 & 3 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 \\ -2 & 5 & -8 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -6 \\ 6 & -3 & 12 \\ 5 & 9 & -2 \end{pmatrix}$$

   $$A^T - 3B + C^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} - 3B + \begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 \\ -2 & 5 & -8 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix} =$$

   $$\begin{pmatrix} -4 & 12 & 21 \\ -6 & 10 & 8 \\ 2 & 13 & 26 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 \\ -2 & 5 & -8 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 9 & 14 \\ -8 & 15 & 0 \\ 5 & 7 & 35 \end{pmatrix}$$

3. $A \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 - 3 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 0 - 4 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ -3 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 5 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

   $$C \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 \\ -1 \cdot (-4) + 5 \cdot 2 - 3 \cdot (-6) \\ -7 \cdot 1 - 2 \cdot 8 - 3 \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 32 \\ 50 \end{pmatrix}$$

$$2B\left(\vec{a}-3\vec{b}\right)=2B\begin{pmatrix}2\\-4\\-8\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}-2\cdot 2-4\cdot 4-8\cdot 8\\-3\cdot 2-4\cdot 2-8\cdot 3\\1\cdot 2-4\cdot 4-8\cdot 7\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}-84\\-36\\-58\end{pmatrix}$$

4. $$AB-BA=\begin{pmatrix}-14&10&18\\-11&12&19\\14&6&8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-28&2&46\\-15&4&20\\-19&12&38\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14&8&-28\\4&16&-1\\33&-6&-30\end{pmatrix}$$

$$CA-AC=\begin{pmatrix}-7&-8&12\\10&14&-21\\-13&-20&30\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-17&19&-21\\-9&12&-15\\36&-39&42\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&-27&33\\19&2&-6\\-49&19&-12\end{pmatrix}$$

$$BC-CB=\begin{pmatrix}38&-40&42\\10&-8&6\\34&-38&42\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7&12&23\\-13&30&-59\\19&48&95\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}31&-52&19\\23&22&65\\15&-86&-53\end{pmatrix}$$

Diese Ergebnisse zeigen deutlich, dass Matrixmultiplikation nicht kommutativ ist!

5. Benutze für die Berechnung der Determinante die Regel von Saurus, dies ergibt:
$\det(A)=21$, $\det(B)=-20$, $\det(C)=0$
Aus den Ergebnissen folgt, dass Matrix C nicht invertierbar ist.

6. $$\det(AB)=\det\begin{pmatrix}14&8&-28\\4&16&-1\\33&-6&-30\end{pmatrix}=-420$$
$\det(A)\det(B)=-20\cdot 21=-420$

Gaußverfahren

1. $$\left(\begin{array}{cc|c}3&-2&-1\\-1&5&9\end{array}\right)\xrightarrow{I+3II}\left(\begin{array}{cc|c}0&13&26\\-1&5&9\end{array}\right)\xrightarrow{I\leftrightarrow II}\left(\begin{array}{cc|c}-1&5&9\\0&13&26\end{array}\right)\xrightarrow{I(-1)\quad\&\quad II:13}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&-5&-9\\0&1&2\end{array}\right)\xrightarrow{I+5II}\left(\begin{array}{cc|c}1&0&1\\0&1&2\end{array}\right)\qquad \text{Ergebnis}: x_1=1 \text{ und } x_2=2$$

2. $$\left(\begin{array}{ccc|c}2&0&0&1\\0&4&4&2\\1&1&5&3\end{array}\right)\xrightarrow{I:2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&\frac{1}{2}\\0&4&4&2\\1&1&5&3\end{array}\right)\xrightarrow{III-I}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&\frac{1}{2}\\0&4&4&2\\0&1&5&\frac{5}{2}\end{array}\right)\xrightarrow{II-4III}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&\frac{1}{2}\\0&0&-16&-8\\0&1&5&\frac{5}{2}\end{array}\right)\xrightarrow{II:(-16)}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}\\0&1&5&\frac{5}{2}\end{array}\right)\xrightarrow{II\leftrightarrow III}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&\frac{1}{2}\\0&1&5&\frac{5}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}\end{array}\right)\xrightarrow{II-5III}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&\frac{1}{2}\\0&1&0&0\\0&0&1&\frac{1}{2}\end{array}\right)\qquad \text{Ergebnis: } x_1=\tfrac{1}{2},\ x_2=0 \text{ und } x_3=\tfrac{1}{2}$$

Invertieren von Matrizen

Mit den Regeln für die Determinante in 2 bzw. 3 Dimensionen erhält man:
$\det(A) = 8$, $\det(B) = 0$, $\det(C) = -21$, $\det(D) = 0$, $\det(E) = 1$
Daraus wissen wir nun, dass B und D nicht invertierbar sind.

Berechnung der Inversen von A:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{II:4} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right) \xrightarrow{I-3II} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right) \xrightarrow{I:2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

Ergebnis: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

Berechnung der Inversen von C:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 8 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{II-9I\&III-4II} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & -27 & -9 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{II:(-10)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{10}{27} & \frac{9}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{III+3II \quad \& \quad I-2II} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{12}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{27}{10} & \frac{9}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{21}{10} & -\frac{13}{10} & -\frac{3}{10} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{III\frac{10}{21}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{12}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{27}{10} & \frac{9}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{21} & -\frac{1}{7} & \frac{10}{21} \end{array}\right) \xrightarrow{II-\frac{27}{10}III \quad \& \quad I+\frac{12}{5}III} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{16}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{8}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{18}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{9}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{21} & -\frac{1}{7} & \frac{10}{21} \end{array}\right)$$

Ergebnis: $C^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{16}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{8}{7} \\ \frac{18}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{9}{7} \\ -\frac{13}{21} & -\frac{1}{7} & \frac{10}{21} \end{pmatrix}$

Berechnung der Inversen von E:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{II-III} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{II-III} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{I-I} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$ Ergbenis: $E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$