Aufgaben Differentialrechnung

Leite die folgenden Funktionen nach x ab.

1

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6x - 5$
b) $f(x) = -\frac{4}{x^3}$
c) $f(x) = 2\sin(\pi x)$

2

a) $f(x) = e^{-x}$
b) $f(x) = \sqrt{e^x}$
c) $f(x) = -\ln(2x)$

3

a) $f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{1-e^x}\right)$
b) $f(x) = \ln\left(\sqrt[3]{\frac{e^{3x}}{1+\sin(2x)}}\right)$
c) $f(x) = 2x - (\ln(2 - 4 \cdot e^x))^2$

4

a) $f(x) = \ln(\ln(x))$
b) $f(x) = b \cdot x^{a+2} \cdot \sin(e^{(c-d)})$
c) $f(x) = x^x$

Übungsaufgaben

Partielle Integration

Löse die folgenden Integrale mit Hilfe von partieller Integration:

1. $\int_0^2 x \cdot e^x dx$
2. $\int_1^3 \ln^2(x) dx$
3. $\int_e^{e^2} x \ln(x) dx$
4. $\int_0^1 x^2 \cdot e^x dx$
5. $\int_0^1 2x \cdot e^x dx$

Substitution

Löse die folgenden Integrale mit Hilfe von Substitution:

1. $\int_0^s e^{-x} dx$
2. $\int_0^9 \frac{1}{(x+1)^2} dx$
3. $\int^1 \frac{\ln(x)}{x} dx$
4. $\int_1^2 \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x} dx$

Substitution und partielle Integration

Löse das folgenden Integrale mit Substitution und/oder partieller Integration:

$$\int_0^1 x \ln(x^2 + 1) dx$$

Übungsaufgaben

Trigonometrische Funktionen

Berechne/Vereinfache die folgenden Ausdrücke:

1. $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$
2. $\sin(x)^2 \cdot \cos(x)^2 + \sin(x)^4$
3. $\cos(x - \pi) \cdot \cos(9\pi)$
4. $\cos(2x) + \sin(x)^2$
5. $\tan(x)^2 - \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$
6. $\cos(x)^3 - \frac{\sin(x + \pi) \cdot \sin(2x)}{2}$

Komplexe Zahlen

Berechne/Vereinfache die folgenden Ausdrücke:

1. $2 + 6i \;+\; (7 - 3i)$
2. $(4 - i) \cdot (5 + 9i)$
3. $\frac{2 + 2i}{4 - 5i}$
4. $2e^{i\pi/3} \cdot 3e^{i\pi/2}$
5. $\frac{4e^{i2\pi}}{9e^{i\pi}}$

Weitere Aufgaben:

1. Berechne das multiplikativ Inverse von $4 + 3i$ sowie $5e^{i\pi/6}$.
2. Zeige, dass $\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sin x$.
3. Transformiere $z = 1 + \sqrt{3}i$ in die Polardarstellung.
4. Transformiere $z = 8e^{i\pi/4}$ in die Real-/Imaginärteil-Darstellung.
5. Berechne i^i.

Aufgaben zur Polynomdivision

0. Start Berechne 148512:13 per schriftlicher Division.

1. Aufwärmen Gegeben seien die Polynome

$$a(t) = x^3 - 2x + 1$$
$$b(t) = -\frac{1}{2}x + 5x^4 - x^3$$
$$\text{und } c(t) = 3 - x^3.$$

a) Gib den Grad und den Leitkoeffizienten jedes dieser Polynome an.
Bestimme daraus jeweils, ohne explizite Berechung des gesamten Terms, Grad und Leitkoeffizient von $a(t) + c(t)$, $b(t) - c(t)$ und $b(t) \cdot c(t)$.

b) Berechne:

(i) $a(t) \cdot b(t)$

(ii) $a(t) \cdot c(t)$

(iii) $b(t) \cdot c(t)$

2. Polynomdivision Bestimme das Ergebnis der folgenden Terme:

a) $(x^2 - 2) : (x - \sqrt{2})$

b) $(-2x^3 + 3x^2 + 2x - 3) : (-2x + 3)$

c) $(x^5 + x^3 + 0.5x^2 - 6x + 1.5) : (x^2 + 3)$

d) $(-4x + 5x^2 - 3 + 3x^3) : (2x + 1)$

e) $(x^4 + 4x^3 + 2x - 3) : (x + 2)$

f) $(x^4 - 5x^2 + 4) : (x + 2) : (x - 2) : (x - 1)$

g) $(x^4 - x^3 - 21x^2 + x + 20) : (x^2 + 5x + 4)$

h) $(-2x^3 + 1 + x^2 - x^4) : (x^4 - x^2 + 2x^3 - 1)$

3. Nullstellen Bestimme die Nullstellen folgender Polynome, indem du eine Nullstelle durch „scharfes Hinsehen“/Einsetzen errätst und dann (falls nötig) die Polynomdivision anwendest.

a) $x^3 + 2x^2 - x - 2$

b) $3x^3 + 3x^2 - 4x - 4$

c) $1.5x^3 - 5.5x^2 + x$

d) $x^3 + 8x^2 + 5x - 50$

e) $x^4 - 13x^2 + 36$

f) $x^4 - 8x^2 - 9$

Übungsaufgaben

Rechnen mit Vektoren

Gegeben seien die folgenden reelwertigen Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1. Zeichnen Sie die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ in ein kartesisches Koordinatensystem.
2. Berechnen Sie
$$\vec{a} + \vec{b}, \qquad \vec{c} - 2\vec{d}, \qquad \vec{a} + 3\vec{d}, \qquad \vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}.$$
Und skizzieren Sie dies.
3. Berechnen Sie
$$\vec{a} \cdot \vec{b}, \qquad \vec{c} \cdot \vec{a}, \qquad \vec{a} \cdot \left(\vec{d} - \vec{c}\right), \qquad \vec{a}\left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right).$$
Und verdeutlichen Sie mit einer Skizze, was das Skalarprodukt bedeutet.
4. Berechnen Sie die Beträge der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$. Sind zwei der Vektoren gleich? Überlegen Sie sich zu jedem Vektor einen Vektor der gleich zu diesem, aber nicht identisch ist.
5. Berechnen Sie
$$\vec{a} \times \vec{b}, \qquad \vec{c} \times \left(\vec{a} + \vec{b}\right), \qquad \left(\vec{d} \times \vec{a}\right) \cdot \left(\vec{b} - \vec{c}\right).$$

Vektoren in Komponentendarstellung

Seien $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3} \in \mathbb{R}^3$ die orthogonalen Einheitsvektoren in x-, y- und z-Richtung.

(i) Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke

  (a) $\vec{e_1} \cdot (\vec{e_2} - 5\vec{e_3})$
  (b) $(\vec{e_1} + 5\vec{e_2}) \cdot (8\vec{e_2} - 6\vec{e_2})$
  (c) $(6\vec{e_1} + 4\vec{e_2} + \vec{e_3}) \cdot (2\vec{e_1} - 6\vec{e_2} + 18\vec{e_3})$

(ii) Bstimmen Sie den Paramter $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass die Vektoren $\vec{a} = \vec{e_1} - 2\alpha\vec{e_2} + 7\alpha\vec{e_3}$ und $\vec{b} = 24\vec{e_1} + \frac{\alpha}{3}\vec{e_2} + 0\vec{e_3}$ orthogonal zueinander sind.

(iii) Welche Länge hat die Projektion des Vektors $\vec{a} = -\vec{e_1} + 2\vec{e_2} + 3\vec{e_3}$ auf die Richtung des Vektors $\vec{b} = 2\vec{e_1} - 6\vec{e_2} + 2\vec{e_3}$?

(iv) Zerlegen Sie den Vektor $\vec{a} = 3\vec{e_1} + \vec{e_2} - \vec{e_3}$ in einen Vektor $\vec{a}_\perp$ senkrecht und einen Vektor $\vec{a}_\parallel$ parallel zum Vektor $\vec{b} = \vec{e_1} + 2\vec{e_2} + \vec{e_3}$. Überprüfen Sie anschließend, dass $\vec{a}_\perp \cdot \vec{a}_\parallel = 0$ gilt.

(v) Bestimmen Sie all jene Einheitsvektoren, die orthogonal zum Vektor $\vec{e_3}$ sind.

Rechnen mit Matrizen und Vektoren

Gegeben seien die folgenden reellwertigen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 8 \\ -3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix}$$

sowie die reelwertigen Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie $A + B$, $A + 5B - C$, $-2C + 3B$.

(b) Berechnen Sie $A^T - B$, $B^T - C^T$, $A^T - 3B + C^T$.

(c) Berechnen Sie $A \cdot \vec{a}$, $C \cdot \vec{c}$, $2B\left(\vec{a} - 3\vec{b}\right)$.

(d) Berechnen Sie $AB - BA$, $CA - AC$, $BC - CB$.

(e) Berechnen Sie die Determinanten der Matrizen A, B und C.

(f) Zeigen Sie explizit am Beispiel der Matrizen A und B, dass $det(AB) = det(A)det(B)$ gilt.

Gaußverfahren

Lösen Sie folgendes Gleichungssystem: $A\vec{x} = \vec{b}$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und $\vec{x}$ unbekannt ist.

Invertieren von Matrizen

Berechnen Sie die Determinaten der folgenden Matrizen und versuchen Sie dann diese zu invertieren, wenn möglich.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 84 & 88 \\ 168 & 176 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 9 & 8 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 9 & 8 & 7 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$