Vorkurs Mathematik
Logik und Beweismethoden 1

Saskia Klaus

05. Oktober 2016

Dieser Vortrag wird schon seit vielen Jahren im Vorkurs gehalten und basiert auf der Arbeit vieler verschiedener Menschen, deren Namen hier leider nicht alle Platz finden. Darunter aber Bärbel Jansen, Winnifred Wollner, Caspar Goch, Axel Wagner und Stefan Richter.

1 Klassische Aussagenlogik

1.1 Aussagen und Wahrheitswerte

In der Mathematik wollen wir Sätze formulieren, die stets „stimmen“ sollen, und aus diesen neue Sätze herleiten, die dann ebenfalls „stimmen“ sollen. Aber was heißt dieses „stimmen“ eigentlich? Indem wir diese Frage klären, können wir die Formulierung und die Beweise mathematischer Sätze auf ein sicheres Fundament stellen.

Definition. Eine *Aussage* ist ein sprachliches Gebilde, bei dem man sinnvoll fragen kann, ob es *wahr* oder *falsch* ist, d. h. wir arbeiten in der Mathematik mit einer zweiwertigen Aussagenlogik.

Notation 1. Wir bezeichnen Aussagen mit den großen Buchstaben des lateinischen Alphabets (A, B, C, $\ldots$) und die zugehörigen Wahrheitswerte mit w für wahr und f für falsch.

Beispiel. Aussagen sind:

- A Es regnet.
- B Alle Rappen sind schwarz.

- C Bayern wird nächste Saison Meister.
- D 16 ist durch 5 teilbar.

Der Wahrheitswert von A ist durch Überprüfen bestimmbar, B ist wahr, C wissen wir noch nicht und D ist falsch.
Keine Aussage hingegen ist:

- Hoffentlich gewinne ich im Lotto.

1.2 Operatoren

Aus bestehenden Aussagen können wir mithilfe von sogenannten *Operatoren* neue Aussagen gewinnen. Ein Operator nimmt eine bestimmte Anzahl von Aussagen (*Operanden*) entgegen und ordnet diesen - abhängig von ihrem Wahrheitswert - einen neuen Wahrheitswert (w oder f) zu. Ein Operator macht also aus einer oder mehreren Aussagen eine neue Aussage.

Bemerkung. Der Wahrheitswert der zusammengesetzten Aussage ist eindeutig durch die Wahrheitswerte der einzelnen Aussagen bestimmt.

Wir wollen nun nacheinander die wichtigsten Operatoren defineren, indem wir für jede mögliche Kombination von Wahrheitswerten der ursprünglichen Aussagen den Wahrheitswert der zusammengesetzten Aussage angeben. Da natürliche Sprache hierfür häufig unhandlich ist, verwenden wir die Notation der sogenannten *Wahrheitstafeln*. Dies sind Tabellen, in denen jede Spalte eine Aussage repräsentiert und jede Zeile eine mögliche Kombination von Wahrheitswerten. In die linken Spalten schreiben wir die möglichen Wahrheitswerte für alle auftretenden Aussagen, in die Spalten rechts davon die Wahrheitswerte der kombinierten Aussagen.

Definition. Sei A eine Aussage. Dann definieren wir die *Negation* $\neg A$ durch

A	$\neg A$
w	f
f	w

Beispiel. Ist A die Aussage „Es regnet", so ist $\neg A$ die Aussage „Es regnet nicht".

Mit Hilfe von Wahrheitstafeln können wir auch sehen, dass die Negation der einzige „interessante" einstellige Operator ist, denn die einzigen möglichen anderen Eintragungen in die Tabelle sind

A	$\neg A$			
w	f	w	f	w
f	w	w	f	f

Neben der Identität und der Negation treten hier nur noch die trivialen Umformungen zu w oder f auf.
Interessanter sehen nun die Wahrheitstafeln für mehrstellige Operatoren (auch *Junktoren*, oder *Verknüpfungen*) aus, da es dort deutlich mehr mögliche Kombinationen gibt. Seine A und B zwei Aussagen.

Definition. Die *und*-Verknüpfung ist definiert durch

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Interpretation: $A \wedge B$ ist wahr, wenn A wahr ist und B wahr ist.

Beispiel. Ist $A =$ „5 teilt 16“ und $B =$„16 ist eine Quadratzahl“, so ist $A \wedge B =$ „5 teilt 16 und 16 ist eine Quadratzahl“.

Definition. Die *oder*-Verknüpfung ist definiert durch

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Interpretation: $A \vee B$ ist wahr, falls A wahr ist oder B wahr ist oder beide wahr sind.

Beispiel. Ist $A =$ „5 teilt 16“ und $B =$„16 ist eine Quadratzahl“, so ist $A \vee B =$ „5 teilt 16 oder 16 ist eine Quadratzahl“.

Definition. Wir definieren die *Implikation* wie folgt:

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

und die *Äquivalenz* durch:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Beispiel. Ist $A =$ „5 teilt 16“ und $B =$„16 ist eine Quadratzahl“, so ist $A \Rightarrow B =$ „Teilt 5 die 16, so ist 16 eine Quadratzahl“ und $A \Leftrightarrow B =$ „5 teilt 16 genau dann, wenn 16 eine Quadratzahl ist“.

Bemerkung. Die obige Definition der Implikation wirkt im allgemeinsprachlichen Verständnis von „daraus folgt“ sehr unintuitiv. Man kann sich aber ähnlich wie bei der Negation überlegen, dass es die einzig sinnvolle Definition ist (s. Übungen).

2 Arbeiten mit Wahrheitstafeln

Wahrheitstafeln sind nicht nur nützlich, um Operatoren zu definieren. Man kann auch den Wahrheitsgehalt kleinerer Aussagen damit überprüfen. Wir werden hier zwei Beispiele dafür sehen, in den Übungen kann man das dann auch mal selbst ausprobieren.

Satz 2 (Satz vom Widerspruch)**.** Sei A eine Aussage. Dann ist folgende Aussage stehts wahr:

$$(A \wedge \neg A) \Leftrightarrow f$$

Beweis. Wir betrachten die zugehörige Wahrheitstafel:

A	$(A \wedge \neg A) \Leftrightarrow f$
w	
f	

Zunächst tragen wir die zugehörigen Wahrheitswerte der Negation ein

A	$\neg A$	$(A \wedge \neg A) \Leftrightarrow f$
w	f	
f	w	

Nun können wir noch die schon bekannte Tabelle der und-Verknüpfung verwenden, um die Wahrheitswerte von $A \wedge \neg A$ zu bestimmen.

A	$\neg A$	$A \wedge \neg A$	$(A \wedge \neg A) \Leftrightarrow f$
w	f	f	
f	w	f	

Mit der Definition der Äquivalenz folgt die Behauptung.

A	$\neg A$	$A \wedge \neg A$	f	$(A \wedge \neg A) \Leftrightarrow f$
w	f	f	f	w
f	w	f	f	w

□

Satz 3 (Satz vom ausgeschlossenen Dritten)**.** Sei A eine Aussage. Dann ist $A \vee \neg A$ stets äquivalent zu w.

Beweis. Wir gehen wie im vorherigen Satz vor. Betrachte die Wahrheitstafel

A	$(A \vee \neg A) \Leftrightarrow w$
w	

Dann erhalten wir unter Verwendung der Tabelle der oder-Verknüpfung

A	$\neg A$	$A \vee \neg A$	$(A \vee \neg A) \Leftrightarrow w$
w	f	w	
f	w	w	

und damit insgesamt:

A	$\neg A$	$A \vee \neg A$	w	$(A \vee \neg A) \Leftrightarrow w$
w	f	w	w	w
f	w	w	w	w

□

3 Prädikate und Quantoren

Oft werden mathematische Sätze mit Unbekannten formuliert, deren konkreter Wert erst später bekannt ist, oder wir wollen einen Satz für eine bestimmte Anzahl von Objekten aus einem Universum beweisen. Dafür benötigen wir sogenannte Prädikate und Quantoren.

Definition. Seien $x_1, \ldots, x_n$ Variablen. Ein *Prädikat* $A(x_1, \ldots, x_n)$ ist ein sprachliches Gebilde, das zu einer Aussage wird, wenn jedes x_i einen konkreten Wert annimmt.

Bemerkung. Auf Prädikate können die gleichen Operatoren angewendet werden wie auf Aussagen, das Ergebnis ist dann aber auch ein Prädikat.

Definition. *Quantoren* spezifizieren, für wie viele Objekte eines Universums ein Prädikat gilt. Die Quantoren sind

$$\forall x : A(x) \longrightarrow \text{„Für alle } x \text{ ist } A(x) \text{ wahr“}$$

$$\exists x : A(x) \longrightarrow \text{„Für mindestens ein } x \text{ ist } A(x) \text{ wahr“}$$

Bemerkung. Die Negationen der beiden Quantoren lauten:

$$\neg(\forall x : A(x)) = \exists x : \neg A(x)$$

$$\neg(\exists x : A(x)) = \forall x : \neg A(x)$$